

Knackpunkt im ersten Schuljahr

Das Teil-Ganzes-Konzept mit Hilfe von Schüttelboxen erarbeiten

Wer über die Zerlegungen aller Zahlen bis 10 automatisch verfügt, kann diese für geschicktes Rechnen nutzen und Rechenwege verkürzen und vereinfachen. Vorrangiges Ziel des Erstunterrichts muss es deshalb sein, dass Kinder das Teil-Ganzes-Konzept verstehen, dass sie also begreifen, dass Zahlen auf unterschiedliche Weisen zerlegt und wieder zusammengesetzt werden können.

Zeitbedarf

6–8 Unterrichtsstunden, bei Bedarf mehr.

Kompetenzen inhaltlich

Sich im Zahlenraum bis 10 orientieren. Zahlbeziehungen verstehen. Zahlzerlegungen gedächtnismäßig beherrschen. Gesetzmäßigkeiten in arithmetischen Mustern erkennen, beschreiben und fortsetzen.

Kompetenzen prozessbezogen

Kommunizieren. Darstellen.

Zusätzliches Material

Für jedes Kind 10 Kastanien, Plättchen o. Ä.

Für je zwei Kinder 1 Schüttelbox, evtl. dazu passendes Zehnerfeld (Bezug im Internet, z. B. www.schmidt-lehrmittel.de).

Für die Fördereinheiten zusätzlich je Kind: 2 Würfel,

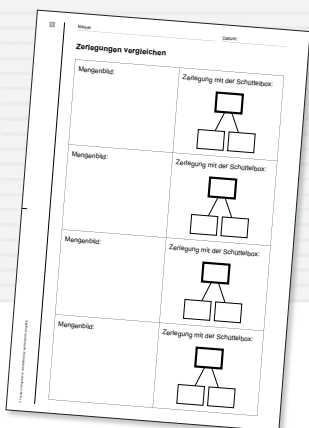
1 Streichholz ohne Kopf, Schieber für die Schüttelbox.

Am Ende der Schuleingangsphase sollen alle Kinder Beziehungen zwischen Zahlen kennen und beschreiben können. Zentral ist dabei das Verständnis des Teil-Ganzes-Konzepts. Es besagt, dass sich jede Zahl aus kleineren Zahlen zusammensetzen oder umgekehrt in kleinere Zahlen zerlegen lässt. Wer das Teil-Ganzes-Konzept verstanden hat und die Zahlzerlegungen bis 10 automatisiert beherrscht, ist gut auf das Rechnen vorbereitet und kann geschickt Rechenvorteile nutzen und Rechenwege verkürzen. Um zum Beispiel die Aufgabe $7 + 5$ über die Strategie „Kraft der Fünf“ in die leichtere Aufgabe $5 + 5 + 2$ zu überführen, muss man wissen, dass die 7 als 5 und 2 zu betrachten ist. Der schrittweise Zehnerübergang („Zehnerstopp“) $7 + 3 + 2$ gelingt nur, wenn man weiß, dass die 7 mit der 3 zu 10 ergänzt werden kann und deshalb die Zerlegung der 5 in 3 und 2 günstig ist. Das heißt, über die Zerlegungen aller Zahlen bis 10 automatisch zu verfügen, ist Bedingung für kompetentes, nicht-zählendes Rechnen.

Materialpaket



- Zerlegungen vergleichen.** Auf der Blankovorlage können die Kinder Schüttelboxergebnisse notieren. In der linken Spalte kann ein Mengenbild eingeklebt und mit dem Schüttelboxergebnis verglichen werden.



Vor dem Erwerb des Teil-Ganzes-Konzepts

Voraussetzung für den Erwerb des Teil-Ganzes-Konzepts ist die Einsicht in die Mengenkonzanz. Das Kind muss sicher sein, dass sich die Anzahl einer Menge nicht verändert, wenn die einzelnen Elemente der Menge lediglich verschoben werden. Kinder, die diese Einsicht noch nicht haben, vergewissern sich der Gesamtanzahl nach jeder Verschiebung neu und zählen nach.

In der Praxis hat sich gezeigt, dass die gezielte Aufarbeitung der Mengenkonzanz mit Übungen zur simultanen Zahlerfassung und mit Zerlegungsübungen Hand in Hand gehen kann. Wenn die Kinder die Zahl in immer



1 Aus der Gesamtmenge von „7“ werden die Teile „3“ und „4“ herausgelöst und verschoben.

2 So kann die Zerlegung visualisiert werden.

neuen Konstellationen kennen lernen, erweitern sie nach und nach ihr Vorstellungsbild der Zahl. Sie nehmen die Anzahl der Menge schließlich als unabhängig von der Anordnung der Elemente wahr. Zunächst ist diese Einsicht noch auf kleine Mengen beschränkt. Die Mengen werden größer, wenn die Kinder mehr und mehr Mengen simultan oder quasi-simultan erfassen können.

Die Lehrkraft sollte darauf achten, welche Schülerinnen und Schüler bereits Einsicht in die Mengenkonzanz haben und welche Mengen sie simultan oder quasi-simultan erfassen können. Ein Hinweis auf fehlende Einsicht in Mengenkonzanz kann sein, wenn ein Kind von Aufgabe zu Aufgabe Plättchenmengen immer wieder neu hinlegt und auszählt und nicht auf bereits gelegte Mengen zurückgreift – selbst wenn die Anzahl dieselbe bleibt. Um ganz sicher zu gehen, werden zusätzlich diagnostische Aufgaben gestellt. Zum Beispiel werden dem Kind sieben Plättchen mit der Frage vorgelegt: Wie viele Plättchen sind es? Dann werden die Plättchen vor den Augen des Kindes verschoben: Und wie viele Plättchen sind es jetzt? Wichtig ist, dass bei solchen Aufgaben die Mengen ausreichend groß sind, sodass die Anzahlen nicht mehr simultan erfasst werden können.

Neben der Einsicht in die Mengenkonzanz sind die Kenntnis der Zahlwortfolge bis „zehn“ und das Auszählenkönnen in Einerschritten unabdingbar für den Erwerb des Teil-Ganzes-Konzepts.

Einführung in das Zerlegen

Die dem Teil-Ganzes-Konzept zugrunde liegenden Operationen sind das Zerlegen und das Zusammensetzen von

Zahlen. Die Begriffsbildung erfolgt im Unterricht nach dem Prinzip „vom Konkreten zum Abstrakten“.

Bei der Einführung des Begriffs „Zerlegen“ lässt die Lehrkraft die Kinder zunächst überlegen, wo ihnen der Begriff schon einmal begegnet ist: Ein Motor kann zerlegt werden. Geflügel. Ein Baum. Ein Möbelstück. Ein Puzzle wird aus vielen Teilen zusammengesetzt und meist nach einer Weile wieder zerlegt.

Dann wird der Begriff „Zerlegen“ auf eine mathematische Alltagssituation übertragen: „Leo und Sören haben in einer Tüte sieben Kastanien gesammelt. Zu Hause nimmt sich jeder seinen Anteil.“ Die Lehrkraft demonstriert die Zerlegung, indem sie aus sieben Kastanien (Plättchen o. Ä.) zuerst drei und dann vier herauslöst und verschiebt (Abb. 1). Begleitend führt sie die Sprechweise ein: „Ich zerlege die Gesamtmenge 7 in die Teilmengen 3 und 4.“ Oder: „Ich zerlege das Ganze, die 7, in die Teile 3 und 4.“

Anschließend werden die beiden Teilmengen wieder zusammengeschieben. Den Teilungsvorgang visualisiert die Lehrkraft vereinfacht an der Tafel (Abb. 2). Der Transfer zwischen den Darstellungsebenen (enaktiv-ikonisch-symbolisch-sprachlich) wird auch von den Kindern von Anfang an gefordert.

Achtung:

- Das Pluszeichen wird bewusst nicht verwendet, weder mündlich noch schriftlich.
- Die Reduktion auf zwei Teilmengen ist in der Einstiegssituation sinnvoll. Den Kindern muss aber erklärt werden, dass auch Zerlegungen in mehr als zwei Teilmengen möglich sind, nur zu diesem Zeitpunkt noch nicht betrachtet werden sollen.

In der anschließenden Arbeitsphase führen die Kinder mit Kastanien oder mit Plättchen selbst Zerlegungen



3 Mit der Schüttelbox ergeben sich zu einer Zahl immer neue Zerlegungen.

durch. Ihre Handlungen beschreiben sie mündlich ihrem Partner. Die Wörter „zerlegen“, „Gesamtmenge“, „Teilmenge“, „Ganzes“ und „Teile“ prägen sich ein. Exemplarisch halten die Kinder einen Zerlegungsvorgang in ihrem Heft zeichnerisch fest.

Zerlegen mit der Schüttelbox

In der nächsten Unterrichtsstunde wird mit der Schüttelbox gearbeitet (Abb. 3). Die Schüttelbox ermöglicht einen weiteren handlungsunterstützten Zugang zu Zerlegungen: Es wird deutlich, dass zu ein und derselben Gesamtmenge verschiedene Zerlegungen möglich sind. Von Vorteil sind Schüttelboxen, bei denen in einer Kammer genau fünf Kugeln nebeneinanderliegen können. Über die „Kraft der Fünf“ können die Kinder dann auch Mengen mit mehr als fünf Kugeln leicht erfassen. Zusätzlich kann die Lehrkraft „blinde Zahlen“ ins Spiel bringen. „4 ist eine Kugel weniger als 5“ (blinde Zahl „1“). Das Kugelbild der „8“ ist über die volle Reihe mit 5 und 3 einzelnen Kugeln wie über die 2 fehlenden Kugeln bis 10 (blinde Zahl „2“) leicht zu erschließen. Um „blinde Zahlen“ in den Vordergrund zu rücken, können die Kammern der Schüttelbox auch mit einem transparenten Zehnerfeld hinterlegt werden.

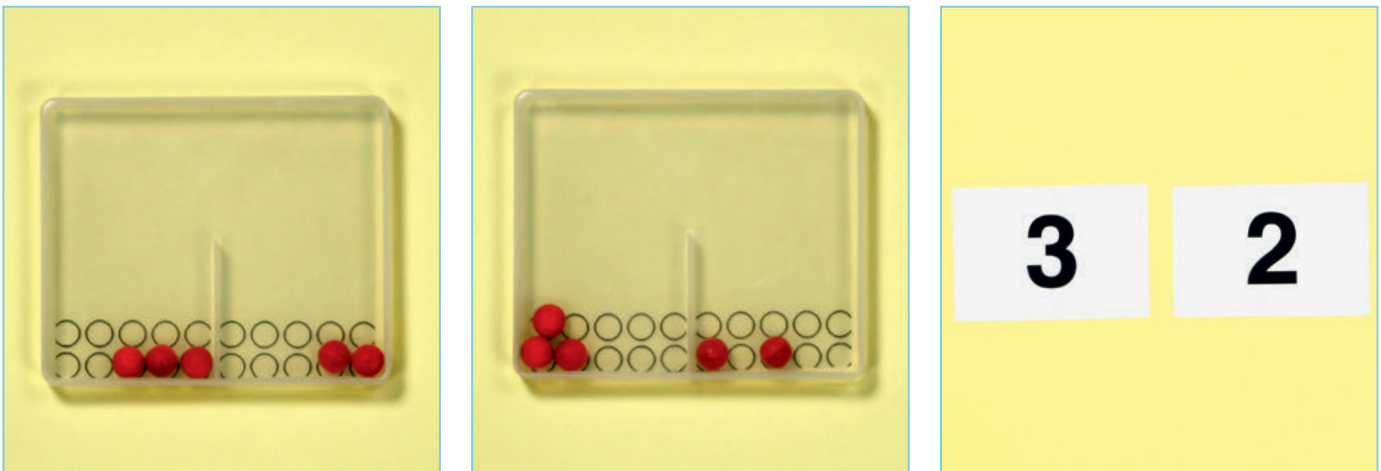
Zunächst erklärt die Lehrkraft die Handhabung der Schüttelbox: Schüttelboxen werden je nach zu erarbeitender Gesamtmenge mit 1 bis 10 Kugeln gefüllt. Beim Schütteln rollt ein Teil der Kugeln in die linke Kammer, der andere Teil in die rechte Kammer. Dadurch ergeben sich verschiedene Zerlegungen. Es ist den Kindern bewusst zu machen, dass es auf die Anzahlen und nicht auf die An-

ordnung in den Kammern ankommt. Verdeutlicht werden kann das, indem eine Schüttelbox nach dem Schütteln vorsichtig bewegt wird, sodass sich die Kugeln anders positionieren, ohne dass sich die Zerlegung ändert (Abb. 4). Weil beide Zerlegungen „gleich“ sind, werden sie durch dieselben Zahlen beschrieben.

In der ersten Problemstellung wird an die bereits bekannte Situation angeknüpft: „Leo und Sören haben an vielen Tagen Kastanien gesammelt. Immer unterschiedlich viele. Finde heraus, in welche Teile Leo und Sören die Kastanien zerlegen können.“ Schüttelboxen mit unterschiedlichen Gesamtmen gen stehen zur Verfügung. Immer zwei Kinder wählen gemeinsam eine Box. Da die Kinder intuitiv wissen, dass große Zahlen mehr Zerlegungen ermöglichen als kleine Zahlen, besteht über die Auswahl der Gesamtmenge eine Differenzierungschance. Damit sich die Kinder beim Finden der Zerlegungen auf die Anzahl konzentrieren und gleiche Zerlegungen bei unterschiedlicher Platzierung der Kugeln als „gleich“ erkennen, wird der Auftrag spezifiziert: „Wenn ihr alle Zerlegungen gefunden habt, holt ihr euch eine neue Schüttelbox.“

Die Partner schütteln eine Zerlegung, übertragen das Zerlegungsbild in ihr Heft und vergleichen ihre Bilder mit denen des Partnerkinds. Die Kinder entscheiden meist aus ihrem Gefühl heraus, wann sie meinen, alle Zerlegungen gefunden zu haben. Sie können die Vollständigkeit ihrer Ergebnisse argumentativ noch nicht unbedingt begründen, finden auch nicht immer alle Zerlegungen oder sortieren doppelte noch nicht aus (Abb. 5).

Über die Schülerdokumente erhält die Lehrkraft einen wertvollen Einblick in den Lernstand ihrer Lerngruppe. Einige Kinder malen die Kugeln der Schüttelbox originalgetreu nach. Andere übertragen das Kugelbild in ein Wür-



4 Die Zerlegungen sind gleich, auch wenn die Kugeln anders angeordnet sind.

felbild oder in ein Zahlzeichen. Manche Kinder erzeugen systematisch unterschiedliche Zerlegungen auf zeichnerischer Ebene oder mit Zahlen. Sie finden heraus, dass die Anzahl der Zerlegungen immer um 1 größer ist als die Anzahl der Kugeln in der Schüttelbox.

Wenn in der Auswertungsphase die Arbeitsergebnisse der Partnergruppen vorgestellt und verglichen werden, entsteht meist ein Disput darüber, unter welchen Bedingungen Zerlegungen als gleich oder als verschieden zu beurteilen sind. Dieser Austausch sollte unbedingt auch genutzt werden, um den Kindern das Prinzip der Mengenkonzanz noch einmal bewusst zu machen.

ihre Ergebnisse in einem Zerlegungshaus (Abb. 6). Da die Zerlegungen nicht mehr dem Zufall überlassen werden sollen, erhalten die Kinder anstelle der Schüttelbox Plättchen, die sie gezielt in zwei Teilmengen zerlegen.

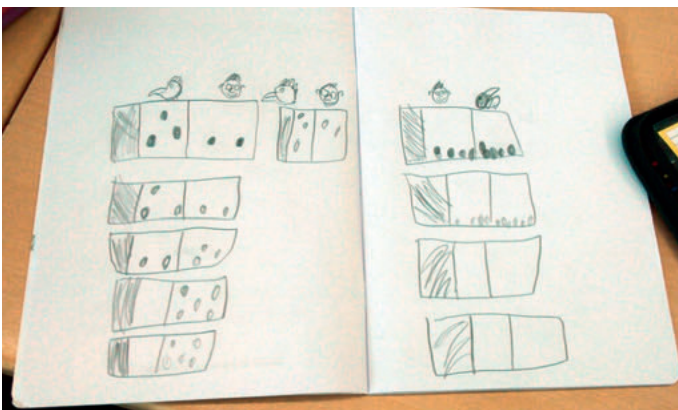
Kinder, die ihre Zerlegungen nicht von sich aus ordnen, notieren diese auf Papierstreifen, die sie dann sortieren und aufkleben. Außerdem kann man ihnen den Tipp geben, die Reihenfolge „von klein nach groß“ zu wählen.

Im Anschluss an diese Lerneinheit beginnt die Automatisierung der Zerlegungssätze – sowohl materialunterstützt als auch rein sprachlich. Spielerische Übungen dazu finden sich auf den nächsten beiden Seiten.

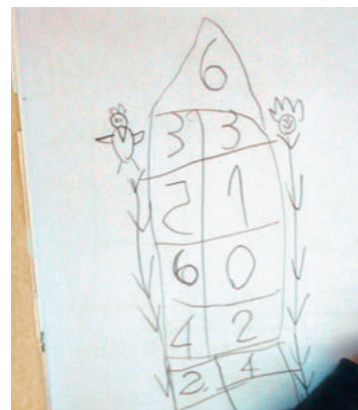
Zerlegen mit dem Zerlegungshaus

In der folgenden Lerneinheit ermitteln die Kinder systematisch alle Zerlegungen der Zahlen bis 10. Sie notieren

Die Schülerarbeiten wurden von Matthias Schulte mit den Kindern der Klasse 1 der Bodelschwingschule Münster entwickelt.



5 Es fällt auf, dass manche Kinder „gleiche“ Zerlegungen noch nicht identifizieren können.



6 Mit dem Zerlegungshaus kann das Finden der Zerlegungen zunehmend systematisiert werden.

Förderhinweise

Wenn manche Kinder beim Zerlegen die Teilmengen und die Gesamtmenge immer wieder zählend nach der Methode des „Alleszählens“ ermitteln, ist das in den ersten Schulwochen nicht bedenklich. Machen die Kinder aber keine Fortschritte im simultanen Erfassen und Zusammenführen von Teilmengen zu einem Ganzen, sind Fördermaßnahmen notwendig. Das Teil-Ganzes-Konzept entwickeln diese Kinder dann ohne Hilfe nicht.

Fördern mit der Schüttelbox und Mengenbildern

Das Zerlegen von Mengen mit der Schüttelbox wird in der Förderung durch die Arbeit mit Mengenbildern (Material oder gezeichnet) ergänzt, die ebenfalls die Zerlegung in zwei Teilmengen nahelegen (z. B. Plättchen im Zehnerfeld, Fingerbilder, Strichlisten oder Würfelbilder; vgl. auch Material zum Beitrag auf S. 36). Die Kinder erfassen und beschreiben die Teil-Ganzes-Struktur des Mengenbildes und vergleichen sie mit der Struktur eines Schüttelboxergebnisses (Abb. 7). Die Aufgabenabfolge ist immer dieselbe:

1. Wie groß ist die Gesamtmenge? Die Kinder ermitteln am Mengenbild die Gesamtmenge (simultan erfassend oder zählend).
2. Welche Teilmengen kannst du erkennen? Die Kinder zerlegen die Gesamtmenge gedanklich in Teilmengen. Sie zeigen ihre Zerlegung am Bild und beschreiben sie mündlich.
3. Die Kinder schütteln mit der Schüttelbox eine beliebige Zerlegung zu derselben Gesamtmenge.
4. Was ist gleich, was ist verschieden? Wie passt das zusammen? Die Kinder vergleichen die Teilmengen im Bild mit den Teilmengen der Schüttelbox. Sie beschreiben die Gemeinsamkeiten (Anzahl in der Gesamtmenge, zwei Teil-

mengen) und die Unterschiede (Anzahlen in den Teilmengen) und stellen den Zusammenhang zwischen den Zerlegungen her.

Schritt für Schritt geht die Förderkraft jede Aufgabenabfolge durch, leitet das Kind an und bespricht die Lösungen mit ihm. Ist der Ablauf gesichert, kann auch eine kundige Mitschülerin oder ein kundiger Mitschüler die Rolle der Lehrkraft einnehmen.

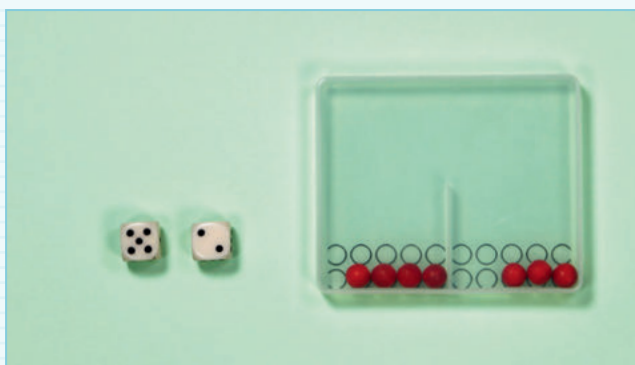
Ganz zentral ist der wechselseitige Transfer zwischen den Darstellungen in Schritt 4, in dem das mentale Umstrukturieren der Zerlegungen verlangt wird. Es ist auch wichtig, in den Schritten 2 und 4 die Verbalisierung einzufordern, damit sich Zahlentripel wie „7 ist 3 und 4“ einschleifen.

Bleibt man zunächst bei einem Material für das Mengenbild und einer Gesamtzahl, kann man später beides auch variieren. Die Schwierigkeit der Übung nimmt auch zu, wenn man statt Mengenbildern Strich-Punkt-Darstellungen mit Fünferbündelung verwendet („Mayazahlen“; vgl. auch Material zum Beitrag auf S. 36). Beim Entschlüsseln der Zahlendarstellung muss sich das Kind dann den Strich mit der Wertigkeit „5“ als Mengenbild vorstellen.

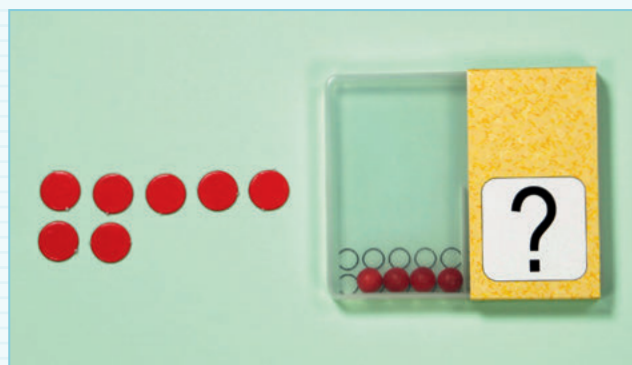
Die Blankovorlage **1 Zerlegungen vergleichen** wird zur Notation der Zerlegungen verwendet. In der linken Spalte der Blankovorlage wird ein Mengenbild eingeklebt oder eingezeichnet.

Fördern mit der Schüttelbox mit Schieber

Bei der Schüttelbox mit Schieber werden die Kugeln einer Kammer von einem Schieber verdeckt. Aus der Zusammenschau eines Mengenbildes und der Schüttelbox (Abb. 8) ergibt sich folgende Aufgabenabfolge:



7 Wie passt das zusammen?



8 Die Gesamtzahl ist links und rechts gleich. Wie viele Kugeln liegen unter dem Schieber?

1. Wie groß ist die Gesamtmenge (im Mengenbild)?

2. In der Schüttelbox sind genauso viele Kugeln.

Wie viele Kugeln liegen unter dem Schieber?

Wie könnten sie angeordnet sein?

Wie heißt die Zerlegung?

Die Kinder beantworten die Fragen mündlich. Es ist sinnvoll, möglichst viele Zahldarstellungen und Schüttelbox-Ergebnisse miteinander zu kombinieren und zu vergleichen. Entlastung bietet hier der Schüttelblock (Finster & Lukow 2014; vgl. auch Rezension auf S. 46).

Spielerisches Üben der Zahlzerlegungen

Es bieten sich folgende spielerische Partnerübungen mit der Schüttelbox und mit Plättchen, Würfeln oder den eigenen Fingern an:

- Ein Kind schüttelt mit der Schüttelbox, die 4 bis 10 Kugeln enthält, eine Zerlegung (ohne Schieber!). Das Partnerkind zeigt mit Plättchen, mit Würfeln oder mit den Fingern a) eine Gesamtmenge, die genauso groß ist, b) die gleiche Zerlegung oder c) die Tausch-Zerlegung (umgekehrte Reihenfolge der Teilmengen).
- Ein Kind schüttelt eine Zerlegung. Das zweite Kind legt dieselbe Zerlegung mit Plättchen nach. Das erste Kind zeigt dann das Fingerbild, das zweite Kind legt die Würfelbilder.
- Ein Kind schüttelt eine Schüttelbox mit Schieber. Es sagt, wie viele Kugeln insgesamt in der Box sind. Das zweite Kind legt für die fehlenden Kugeln Plättchen, legt das passende Würfelbild oder streckt die entsprechende Anzahl Finger aus. Will man auch Strich-Punkt-Darstellungen legen lassen, kann ein Streichholz ohne Kopf den Strich darstellen.
- Das erste Kind würfelt verdeckt mit zwei Würfeln und beschreibt die Zerlegung: „Die Gesamtmenge ist 8. Ich sehe 3 und 5.“ Oder umgekehrt: „Ich sehe 3 und 5. Das sind 8.“ Das zweite Kind legt dieselbe Zerlegung mit einem anderen Material seiner Wahl nach. Die Kinder vergleichen, ob ihre Gesamt- und Teilmengen übereinstimmen. Anschließend gibt das zweite Kind eine Gesamtmenge und eine Zerlegung mit einem Material seiner Wahl vor.

Besondere Bedeutung kommt den Zahlzerlegungen der 10 zu („Partnerzahlen“, „verliebte Herzen“). Hier bietet sich eine Automatisierung über „blinde Fingerbilder“ an:

- Klappe sieben Finger auf. Wie viele sind eingeklappt? Oder: Zeige sieben Finger. Schau auf die eingeklappten

Finger. Wie viele musst du noch aufklappen, bis zehn aufgeklappt sind?

Partnerübungen zum Transfer von der konkreten zur bildlichen Ebene und umgekehrt:

- Das erste Kind zeichnet ein Mengenbild. Das zweite Kind legt die Darstellung mit Material nach und beschreibt die Gesamtmenge und die Zerlegung.
 - Das erste Kind stellt mit Material eine Zerlegung dar. Das zweite Kind sucht ein passendes Mengenbild aus.
- Partnerübungen zum Transfer zwischen allen drei Ebenen (konkret–bildlich–symbolisch mit Zahlen):
- Das erste Kind notiert eine Zerlegung im Zerlegungshaus (für das zweite Kind sichtbar oder unsichtbar) und beschreibt die Zerlegung. Das zweite Kind stellt die Zerlegung mit Plättchen und jedem anderen Material nach. Das erste Kind kontrolliert. Dann zeichnet es die passenden Mengenbilder.
 - Das erste Kind nennt eine Gesamtzahl. Das zweite Kind notiert dazu eine Zerlegung im Zerlegungshaus. Gemeinsam legen sie die Zerlegung mit jedem Material nach. Dann sucht das erste Kind eine andere Zerlegung zu derselben Gesamtzahl.

Bei den Übungen sollte darauf bestanden werden, dass die Kinder ihr Handeln sprachlich begleiten, damit sich die Zerlegungen langfristig festigen. Zur Automatisierung der Zahlentripel reicht die verkürzte sprachliche Form: „8 ist 6 und 2.“ Oder auch: „8 ist 6 und wie viel?“ Das andere Kind wiederholt und ergänzt zunächst noch den vollständigen Satz: „8 ist 6 und 2.“ In späteren Übungen gibt die Lehrkraft oder das Partnerkind nur noch eine Gesamtzahl („8“) und den einen Teil der Zerlegung („6“) vor. Das Partnerkind ergänzt die fehlende Zahl („2“).

Das Automatisieren der Zahlzerlegungen sollte zum festen Bestandteil des Unterrichts werden. Der Prozess darf sich gerne über einen längeren Zeitraum hinziehen. Zum Ende des ersten Schuljahrs sollten aber alle Schülerinnen und Schüler gedächtnismäßig alle Zahlzerlegungen bis 10 beherrschen.

Die Aufgabenabfolgen zur Arbeit mit der Schüttelbox sind abgestimmt auf die Übungen mit dem Schüttelblock:

Finster, E.; Lukow, H.-J.: Zahlzerlegung im Zahlenraum bis 10 mit dem Schüttelblock. In: Finster, E.; Lukow, H.-J.: Zahlzerlegung im Zahlenraum bis 10. Das Schüttelbox-Programm. Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen, Osnabrück 2014.