

# Von der Menge zum Operieren mit Zahlen im Zahlenraum bis 10

## Das Visualisieren und der visuelle Umbau von Anzahlen mit dem Einsatz von strukturierten Materialien

Angelika Albert und Hans-Joachim Lukow, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen (Rechenschwäche / Dyskalkulie)



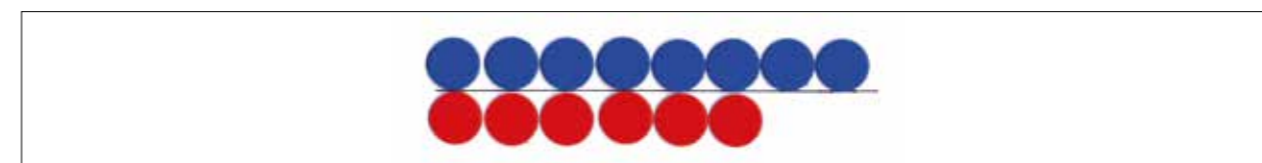
Wenn Kinder beginnen, in ihrem Alltag Zahlen wahrzunehmen, lernen sie diese häufig als Zahlengedicht wie das Alphabet auswendig, und parallel dazu erfassen sie, dass diese Zahlwörter jeweils einem Objekt zuzuordnen sind (synchrones Zählen). Kinder zählen an ihren Fingern und sind zunächst der Auffassung, dass der 3. Finger den Namen „3“ hat. In dieser Phase wissen sie noch nicht, dass Zählen eine verkürzte Addition darstellt und „3“ die

Menge aller mit Zahlwörtern benannten Finger bedeutet. Auch verfügen sie noch nicht über das Verständnis, dass beispielsweise „5“ die Einheit von 5 Einsen darstellt. Pädagogische Arbeit im Erstunterricht oder auch therapeutische Interventionen, die auf verfestigte Fingerzähler treffen, haben als wesentliche Aufgabe, am Ablösen der Vorstellungen von Zahlen als Positionen zu arbeiten.

In diesen Ausführungen geht es um die Entwicklung des Verständnisses des Enthaltenseins von Teilmengen in der jeweiligen Gesamtmenge sowie um den Aufbau des kardinalen Anzahlbegriffs, dass Zahlen aus Zahlen bestehen, bei der jede natürliche Zahl aus der vorhergehenden entsteht, vermehrt um eins.

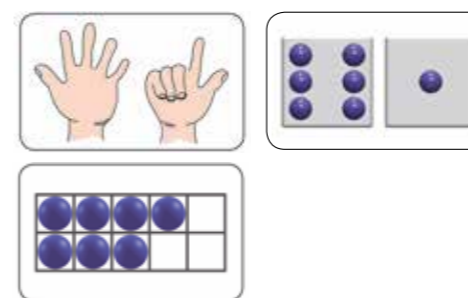
Im ersten Schritt, im direkten Lerndialog mit dem Kind, ist in Erfahrung zu bringen, inwieweit Mengen/Anzahlen noch gezählt werden, oder ob diese bereits sicher erfasst werden können. Im darauffolgenden Lernschritt geht es darum, in der praktischen Verwendung von mindestens zwei Materialien, wie einem Zehnerfeld und Fingerbildern<sup>1</sup>, Mengenstrukturen simultan bzw. quasi-simultan zu erfassen und damit den kardinalen Zahlbegriff zu erarbeiten. Bevor mit dem systematischen Einüben der

Zahlzerlegung bis 10 begonnen wird, ist zuerst der Zahlaufbau als tragfähiges Gerüst zu erarbeiten. Hierfür muss ein Kind verstehen, dass die Zahl 8 nach 7 kommt, weil 8 eins mehr als 7 und 7 eins weniger als 8 ist. Für die Erarbeitung des Zahlaufbaus sind Fingerbilder, Steckwürfeltürme oder auch Darstellungen von Chips im Zehnerfeld denkbar. Auf dieses Verständnis fußend ist dann der Vergleich zweier Mengen, die strukturiert dargeboten werden, abzusichern. Hierzu werden beispielsweise 6 rote und 8 blaue Chips hingelegt, um auf einen Blick festzuhalten, dass 2 blaue Chips keinen Partner haben und es folglich 2 blaue Chips mehr sind. Resultierend daraus sollte das Kind zu diesem Zeitpunkt auf der anschaulichen Ebene festhalten können: Es sind 6 rote und 8 blaue Chips und es sind 2 blaue mehr und 2 rote Chips weniger.



### Warum überhaupt verschiedene Materialien für das Erfassen von Anzahlen?

Die Finger- und Würfelbilder sowie das Zehnerfeld haben der Sache nach kaum etwas Gemeinsames.



Denkt man sich den Mathematikunterricht weg, sind es Materialien aus der Anatomie, dem Spiel und der Schule. In der mathematischen Benutzung schafft der Lehrende den Gesichtspunkt, alles unter dem Aspekt der Anzahl zu betrachten. Kinder erschließen sich ihre Umgebung, indem sie Klassen/Gruppen/Kategorien bilden. Im mathematischen Anfangsunterricht ist der Schwerpunkt in der Klassifikation „Anzahlen“ zu legen. Um die gemeinsame Klasse „Anzahlen“ herauszuarbeiten, ist es notwendig, mindestens zwei Materialien zu verwenden, die

<sup>1</sup> vgl. Gaidoschik, 2007, S. 53 ff

unterschiedlich strukturiert sind, an denen die gleiche Anzahl präsentiert wird. Für ein Kind ist es alles andere als selbstverständlich, dass 5

und 2 Finger, 6 und 1 Würfelpunkt und 4 und 3 Kugeln im Zehnerfeld als die wertmäßig gleiche Anzahl, hier 7, wahrgenommen werden.

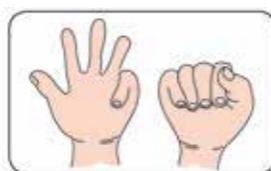
### Übungen zum sicheren Erkennen von Anzahlen mit Fingerbildern im Wechsel mit dem Zehnerfeld<sup>2</sup>

Um beim Kind einen gesicherten Aufbau innerer Vorstellungsbilder im Zahlenraum bis 10 zu erreichen, dienen Übungen zum zählfreien, blitzartigen Erkennen von Anzahlen und sollten regelmäßig wiederholt werden.

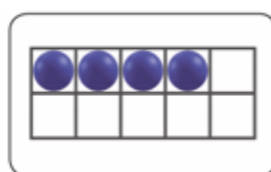
Für Übungen im Unterricht empfiehlt es sich, am Anfang einer jeden Unterrichtseinheit, den Schülern Abbildungen von Fingerbildern mit wechselnden Anzahlen, anschließend von Zehnerfeldern und/oder Würfelbildern kurz darzubieten und benennen zu lassen. Die von der Lehrkraft provozierte Geschwindigkeit in der Anzahlbenennung soll sukzessive dazu führen, dass nach und nach die Strukturen der Anzahlen erkannt und genutzt werden. Damit kann den Abzählstrategien, wie dem Fingerzählen, gleich von Beginn an entgegengewirkt werden, um damit den Einstieg in ein sicheres Operieren mit Zahlen zu erreichen.

Beim Erfassen von Anzahlen bietet es sich zunächst an, mit Anzahlen bis 5 zu beginnen. Alle höheren Anzahlen leiten sich in der Folge systematisch von den hier gewonnenen Einsichten ab. Die sprachliche Begleitung der Handlungen und Aktivitäten unterstützt das Festigen der gewonnenen Einsichten (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010).

Übungsbeispiele:



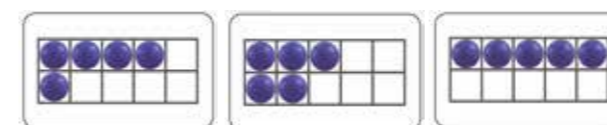
„Wie viele Finger sind aufgeklappt? Es sind 4 Finger, vorher waren es 3 Finger. Wie viele Finger sind eingeklappt?“



„Wie viele Kugeln sind im Zehnerfeld? Es sind 4 Kugeln, weil eine Kugel bis 5 Kugeln fehlt.“

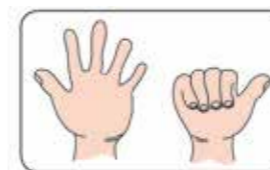
Mit den eigenen Fingern und/oder mit Fingerbildern werden zunächst die Anzahlen bis 5 erarbeitet und gleichzeitig der Zahlaufbau besprochen. Zur anschaulichen Demonstration werden die Finger einer Hand aufgeklappt, und es wird daran gezeigt, dass beispielsweise 4 Finger ein Finger mehr als 3 Finger und 3 Finger ein Finger weniger als 4 sind. In diesem

Kontext sind aus dem Zahlaufbau um eins die ersten Rechenoperationen, die Addition und die Subtraktion, herauszuarbeiten. Das Kind sieht und erklärt dabei, dass zu den vorhandenen 3 Fingern ein weiterer Finger hinzugefügt wurde und so die Anzahl 4 entstanden ist, die in der Addition  $3+1=4$  dargestellt wird. Die Umkehrung ist genauso zu besprechen. Aus 4 Fingern werden durch Einklappen eines Fingers wieder 3 Finger, dargestellt in der Subtraktion  $4-1=3$ . Um die Kardinalität der Anzahl dem Kind bewusst zu machen, ist mit den aufgeklappten Fingern<sup>3</sup> zu „winken“.



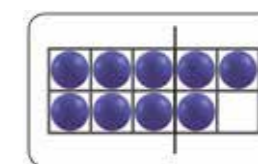
Mit Übungen durch Verschieben von Chips auf dem Zehnerfeld, oder durch Einzeichnen von Kugeln auf entsprechenden Arbeitsblättern, verinnerlichen die Kinder die unterschiedlichen Strukturen derselben Anzahl, wie in diesem Beispiel  $5=4/1$ ,  $5=3/2$  oder  $5=5/0$ .

Wenn nach dem Erarbeiten der Anzahlen im Zahlenraum bis 5 mit Fingerbildern mit dem Erkennen der Anzahl 6 fortgesetzt wird, ist ein Finger der nächsten Hand aufzuklappen.



Im Folgenden wird von Kernfingerbildern gesprochen, wenn zunächst die Finger zu einer vollen Hand aufgefüllt werden, um dann sukzessive die Finger der anderen Hand hinzuzunehmen. Im Unterschied dazu handelt es sich um eine Zerlegung von 8, wenn 4 Finger einer Hand und 4 Finger der anderen Hand aufgeklappt sind. Diese lassen sich in das Kernfingerbild von 5 Fingern der einen Hand und 3 Finger der anderen Hand übertragen (Gleichung  $4+4 = 5+3 = 8$ ).

Die Übertragung von Fingerbildern auf ein zweites strukturiertes Material soll verhindern, dass das Kind nicht schematisch an einem Material haften bleibt. Zum anderen sind die Finger aber das Material, welches sie immer bei sich haben. Die Gefahr bei der Verwendung nur eines Materials besteht darin, dass kein flexibler Wechsel stattfindet und das Kind das Bild dieser Struktur in seiner Vorstellung mit der Anzahl gleichsetzt.



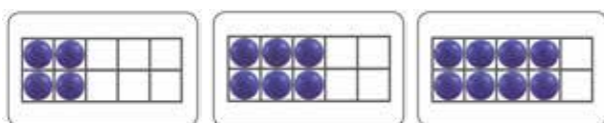
Das hier gewählte Zehnerfeld ermöglicht weitere Strukturen zu finden, die mit den Fingerbildern schlecht dargestellt werden können. Gedacht ist dabei an die Zerlegungen wie 6 in 4 und 2, 7 in 4 und 3 oder 9 in 6 und 3. Im Zehnerfeld lässt sich die Würfelsechs auf einen Blick erkennen (nach ein wenig Übung) und so die Zerlegung von 9 in 6 und 3 üben. Diese

<sup>2</sup> Bei dem hier verwendeten Zehnerfeld handelt es sich um ein Feld mit 10 Kästchen, bei dem ein Umbruch nach jeweils 5 Kästchen erfolgt.

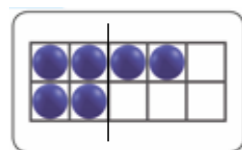
<sup>3</sup> Für die zu erarbeitende Anzahl 4 ist es gleichgültig, mit welchem Finger das Kind beginnt (gewohnheitsmäßig und aus anatomischen Gründen wird häufig zuerst der Daumen aufgeklappt).

Zerlegungen mit Fingerbildern zu erarbeiten, ohne ein weiteres Hilfsmittel zu verwenden, wie einen Stift zwischen die Finger zu legen, die die beiden Teilmengen sichtbar macht, ist nicht möglich.

Bei dem von uns verwendeten Zehnerfeld, in der Aufteilung von 5 oben und 5 unten, lassen sich die Doppelstrukturen von 4 und 6 als Würfelbild erkennen. Im Gegensatz zum linearen Zehnerfeld, das in Schulbüchern favorisiert wird, ist mit diesem Zehnerfeld nicht nur die Analogie zur Fünferstruktur der Fingerbilder hergestellt, durch 5 Felder in der oberen bzw. in der unteren Reihe, sondern es können die Doppelstrukturen von 4, 6 und 8 auf einen Blick erfasst werden.

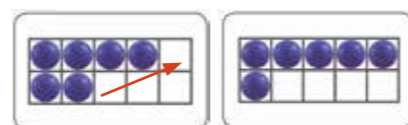


In der praktischen Anwendung des Zehnerfeldes kann das Kind selbst, aktiv handelnd, durch Verschieben von Plättchen neue Zerlegungen derselben Anzahl entdecken.



*Übungsbeispiel: 6 Chips sind auf dem Zehnerfeld als Würfelvier und 2 Chips angeordnet. Sie können in dieser Anordnung simultan erfasst werden. Eine weitere Möglichkeit des Erkennens derselben Anzahl besteht darin, sie linear als 4 in einer Reihe oben und 2 Kugeln in der unteren Reihe, festzuhalten.*

Im folgenden Beispiel schiebt das Kind nun einen Chip aus der unteren Reihe in die obere Reihe und erhält so eine neue Struktur von 5 Kugeln in einer Reihe (Kraft der Fünf) und 1 Kugel in der unteren Reihe. Damit sind zwei Zerlegungen von 6 in 4 und 2 und 5 und 1 festzuhalten.

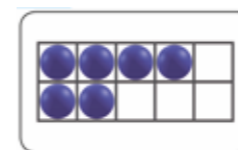


Mit jeder neu erkannten Struktur derselben Anzahl lernt das Kind neue Zerlegungen. Es ist damit immer weniger auf Verfahren, wie schematisches Auswendiglernen von Zahlzerlegungen, angewiesen, sondern entdeckt selbst durch Umstrukturieren der Mengen, welche Zahlen in der Gesamtmenge enthalten sind.

Für Übungen im Schulunterricht ist es empfehlenswert, jedem Kind ein Zehnerfeld (Kopiervorlage im Anhang von Kopf und Zahl) zum Erkennen von Anzahlen und zum Erarbeiten der Zahlzerlegung zur Verfügung zu stellen. Allein oder in der Gruppe, können jetzt sukzessive alle Anzahlen von 1 bis 10 erarbeitet und es kann notiert werden, in welche Teilmengen die Anzahlen zerlegt und zu einer Gesamtmenge wieder zusammengefasst werden.

Wie das geübt werden kann, möchten wir am Beispiel von 6 noch einmal exemplarisch zeigen:

1. Ich sehe in der oberen Reihe 4 und unten 2 Kugeln<sup>4</sup>, zusammen sind es 6 Kugeln.



2. Ich sehe die Würfelvier und daneben 2 Kugeln, zusammen sind es 6 Kugeln.
3. Es fehlen 4 Kugeln bis 10 Kugeln und deswegen sind es 6 Kugeln.
4. Wenn ich eine Kugel von den 4 Kugeln aus der Würfelvier in die obere Reihe schiebe, dann sind es oben 5 und unten ist es 1 Kugel. Zusammen sind es 6 Kugeln.

Damit sind folgende Zerlegungen erarbeitet:  
 $4+2 = 10-4 = 5+1 = 6$ .

Auf das strukturierte Erfassen von Mengen und die Verknüpfung mit verschiedenen Materialien wurde bereits in Kopf und Zahl Nr. 15 von Andrea Timmerevers und Ulrike Linnemann in dem Artikel „Fingerrechnen und Zehnerfeld“ die Verwendung von Fingerbildern und Zehnerfeld hingewiesen.

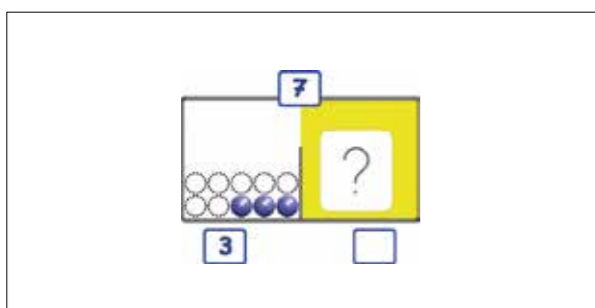
Unser Artikel „Von der Menge zum Operieren mit Zahlen“ versteht sich als Vertiefungsartikel der dort besprochenen Inhalte. Die beiden Autorinnen Timmerevers und Linnemann führen in ihrem Artikel bereits aus, dass die Kinder im Unterricht Strukturen der Fingerbilder und des

Zehnerfeldes miteinander kombinieren sollten. „Die Kinder müssen dabei lernen, strukturierte Bezüge erfassen zu können, sowohl quantitativ als auch qualitativ. Dabei kommt es darauf an, ihnen erst das Sehen von Anzahlen und das Enthaltensein von kleineren Mengen anhand ihrer Finger beizubringen“, so die Therapeutinnen. „Diese Bezüge brauchen Kinder als Verständnisgrundlage, bevor sie die Aufgabe  $(3+2)$  – also die symbolische Ebene – nachvollziehen können. Ist dieses grundlegende Anzahlverständnis und die Einsicht in die Zahlbeziehungen nicht vorhanden, besteht die Gefahr, dass die Schüler ein rein schematisches Wissen ohne Mengenbezug erlangen, wenn zu früh mit der Aufgabe in Ziffernform im Mathebuch begonnen wird. Dann gelingt ihnen auch der Transfer zu naheliegenden Aufgaben wie  $4+2$  oder aber zur Umkehraufgabe  $6-2$  nicht oder nicht zuverlässig und die Schüler greifen auf das zurück, was sie haben und können: Finger, an denen sie Ergebnisse ohne Zusammenhänge immer wieder einzeln abzählen.“

<sup>4</sup> Bei den Abbildungen im Zehnerfeld sind Kugeln eingezeichnet. Im Unterricht können Chips oder Steckwürfel verwendet werden.

### Mit der Schüttelbox mit innenliegendem Zehnerfeld Mengen und Anzahlen erkennen und Zahlen zerlegen

Als hilfreiches Lernmittel zum Erlernen der Zahlzerlegung hat sich die Schüttelbox mit der Kraft der Fünf erwiesen. Sie ist um die Variante mit einem integrierten Zehnerfeld erweitert worden, die das visuelle Erfassen der Anzahlen unterstützt.



Je nach Lernstand des Kindes kann diese Schüttelbox offen (ohne Kartonschuber) oder verdeckt eingesetzt werden. Die offene Box erlaubt die Arbeit mit zwei sichtbaren Teilmengen. Die Übung mit der offenen Schüttelbox besteht darin, jede einzelne Teilmenge simultan bzw. quasi-simultan zu erfassen, um darüber im nächsten Schritt die Gesamtmenge zu bestimmen. Wird mit dem Kartonschuber eine Seite der Schüttelbox abgedeckt, ist die fehlende Teilmenge zu ermitteln. Es gilt nun, ausgehend von der gegebenen Gesamtmenge und einer bekannten Teilmenge, auf die fehlende Teilmenge hinter dem Fragezeichen zu schließen.

### Direkter Anzahlvergleich und visueller Umbau mit dem Zehnerfeld und der Schüttelbox

In diesem und in den folgenden Übungsbeispielen geht es darum, die fehlende Teilmenge in der Schüttelbox durch einen direkten Anzahlvergleich oder durch einen visuellen Umbau zu ermitteln.

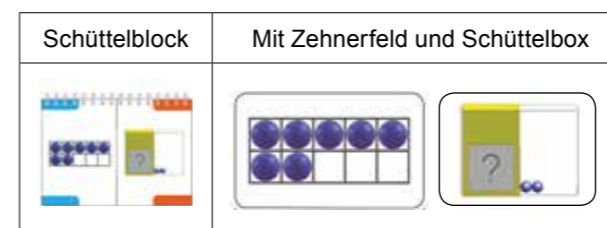
Hierzu ist es notwendig, einen Vergleich von zwei gleichgroßen Mengen durchzuführen, dargestellt im Zehnerfeld und in der Schüttelbox. Im Zehnerfeld ist die Gesamtmenge sichtbar, in der Schüttelbox ist eine Teilmenge zu er-

kennen, die andere ist verdeckt. Im Folgenden werden Darstellungen aus dem Schüttelblock (Schüttelbox-Programm, vgl. Finster & Lukow) verwendet<sup>5</sup>. Die hier gezeigten Übungen können aber auch mit einem Zehnerfeld und einer Schüttelbox durchgeführt werden.

### Der direkte Anzahlvergleich

*Übungsbeispiel:*

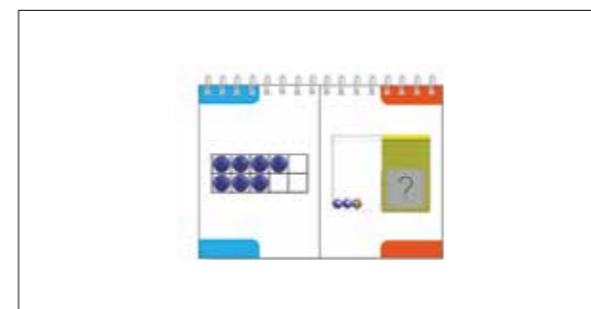
*Die Gesamtmenge, hier 7, gibt das Zehnerfeld (links) vor. In der Schüttelbox (rechts) befindet sich die gleiche Gesamtmenge. Hier ist die eine Teilmenge 2 sichtbar.*



In diesem Beispiel ist die Gesamtmenge 7 im Zehnerfeld (links) über die Struktur von 5 Kugeln oben und 2 Kugeln unten, oder alternativ als Würfelvier und 3 Kugeln, dargestellt. Nun werden die beiden sichtbaren Kugeln in der Schüttelbox (rechts) mit den beiden unteren Kugeln im Zehnerfeld abgeglichen und so die fehlende Teilmenge 5 erschlossen. Diesen Abgleich nennen wir direkter Anzahlvergleich.

*Übungsbeispiel:*

*Die Teilmenge 3 in der offenen Kammer der Schüttelbox ist den 3 Kugeln in der unteren Reihe im Zehnerfeld (Gesamtmenge 7) gegenüber zu stellen.*



Auf der rechten Seite des Schüttelblocks sind 3 Kugeln in der Schüttelbox in der offenen Kammer zu erfassen und dann mit den 3 Kugeln der Gesamtmenge in der unteren Reihe im Zehnerfeld abzugleichen. Auf die Anzahl der fehlenden Teilmenge hinter dem Fragezeichen der Schüttelbox kann jetzt mit einem Blick auf die obere Reihe im Zehnerfeld geschlossen werden: Es müssen 4 Kugeln sein. Während der Übungen ist der Schüler angehalten, seine Beobachtungen zu verbalisieren.

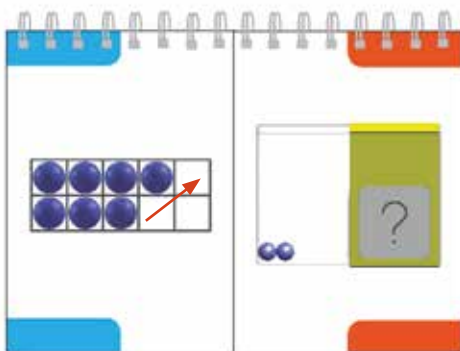
<sup>5</sup> Der Schüttelblock ist Teil des Schüttelbox-Programms. Zehnerfelder und Schüttelboxen mit Anzahlen bis 10 sind bereits als Abbildungen im Block. Ein Umschlagen der Seiten macht einen zügigen Wechsel in der Anzahlerkennung und Zahlzerlegung möglich, der für ein Automatisieren vorteilhaft ist. Neben dem Schüttelblock besteht das Konzept aus 2 CDs zur Anzahlerkennung und Zahlzerlegung, 2 Schüttelboxen, einem Handbuch und einem Schüttelbox-Arbeitsheft, [www.schuettelbox-programm.de](http://www.schuettelbox-programm.de).

## Der visuelle Umbau von Anzahlen

Beim direkten Anzahlvergleich kann die gleiche Struktur der Teilmenge in der Schüttelbox und in der Gesamtmenge des Zehnerfeldes entdeckt und somit direkt abgeglichen werden. Damit ist zählfrei auf die fehlende Teilmenge in der Schüttelbox zu schließen. Ein visueller Umbau<sup>6</sup> von Anzahlen wird dann notwendig, wenn sich die gleiche Anzahl nicht auf einen Blick entdecken lässt. Dabei ist die Gesamtmenge vor dem geistigen Auge des Kindes in eine neue Struktur umzubauen.

### Übungsbeispiel:

*Es ist mit der Frage zu beginnen: „Wie groß ist die Teilmenge, die sich hinter dem Fragezeichen befindet, wenn die Gesamtmenge 7 und die sichtbare Teilmenge 2 in der offenen Kammer der Schüttelbox ist?“ Für die Ermittlung der fehlenden Teilmenge bieten sich zwei Möglichkeiten an:*



1. Die Gesamtmenge im Zehnerfeld ist 7 und kann als 4 Kugeln in der oberen Reihe und 3 Kugeln in der unteren Reihe erfasst werden. Diese Darstellung soll nun mit den 2 Kugeln in der Schüttelbox abgeglichen werden. Da kein direkter Abgleich vorgenommen werden kann ist es jetzt notwendig, die Gesamtmenge im Zehnerfeld visuell umzubauen. Das Kind schiebt nun vor dem geistigen Auge eine Kugel aus der unteren Reihe, in der sich 3 Kugeln befinden, in die obere Reihe. Es entsteht damit eine andere Anordnung. In der oberen Reihe sind es nun 5 Kugeln und in der unteren Reihe 2 Kugeln. Jetzt ist wieder der Anzahlvergleich direkt möglich. Somit entsprechen die 5 Kugeln in der oberen Reihe der gesuchten Teilmenge in der Schüttelbox.
2. Es ist ebenfalls möglich in der Gesamtmenge eine Würfelvier und 3 weitere Kugeln zu erkennen. Auch hier ist wieder eine Kugel aus der unteren Reihe in die obere Reihe zu schieben. Die gesuchte Teilmenge ist damit 5.

Das Vergleichen der Anzahlen und das damit verbundene visuelle Umstrukturieren der Mengen führen dazu, dass die Zahlzerlegung vom Kind verständig erlernt und verinnerlicht wird.

### Zitierte Literatur und Links

- Gaidoschik, M. (2007). Rechenschwäche vorbeugen – Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern. Oebvht VerlagsgmbH und Co.KG, Wien 2007
- Finster, E., Lukow, H. (2014). Handbuch zum Schüttelbox-Programm, Osnabrück
- Moser Opitz, E. (2007). Erstrechnen. U. Heimlich & F. Wember (Hg.), Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis. (S. 253–265). Stuttgart: Kohlhammer
- Timmerevers, A., Linnemann, U. (2011) Kopf und Zahl Nr. 15, Fingerrechnen und Zehnerfeld
- Albert, A., Lukow, H. Schüttelbox-Arbeitsheft, Zahlzerlegung mit der Schüttelbox, 2017, Hg. Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen (Rechenschwäche/Dyskalkulie)

<sup>6</sup> Der visuelle Umbau, der durch ein Umstrukturieren der gegebenen Anzahl visuell (nicht aktiv handelnd) vor dem geistigen Auge des Kindes erfolgt, kann auch mit anderen Materialien als mit dem hier exemplarisch vorgestellten Zehnerfeld, also mit Fingerbildern, Mayazahlen, geübt werden. Weitere Beispiele im Handbuch zum Schüttelbox-Programm.