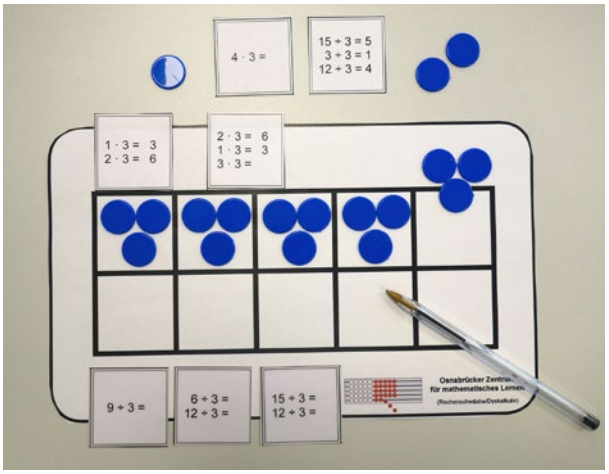
31

Kopf und Zahl

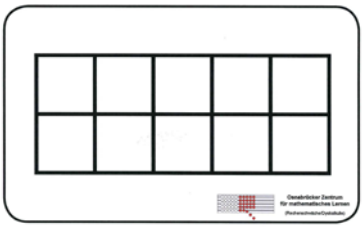
JOURNAL
des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.**
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**
31. AUSGABE, Frühjahr 2019
www.dyskalkulie.de



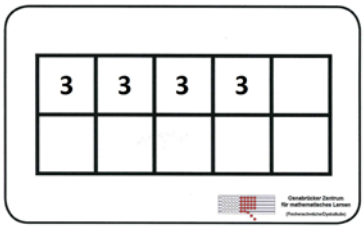
Zehnerfeld, Multiplikations- und Divisionskarten zum Erarbeiten der Punktrechnungen

Autoren: Angelika Albert, Hans-Joachim Lukow, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen (Rechenschwäche/Dyskalkulie), 2019

In diesem Artikel wird die Erarbeitung der Multiplikation und der Division unter Verwendung eines Zehnerfeldes und mithilfe von Übungskärtchen zum systematischen Automatisieren der Einmaleins-Aufgaben und ihrer Umkehrung des kleinen Einsdurcheins erläutert. Zu Beginn wird thematisiert, wie über die Einführung von Kernaufgaben (1 •, 2 •, 5 • und 10 •) und entsprechenden Ableitungen (3 •, 4 •, 6 •, 7 •, 8 •, 9 •) die Multiplikation über den Rückgriff auf die zuvor behandelten Strichrechnungen bis 100 erarbeitet und die Division direkt aus der Umkehrung der Multiplikation abgeleitet werden kann. Wird bei der Multiplikation immer die gleiche Teilmenge addiert, um damit die Gesamtmenge zu ermitteln, so gilt es bei der Division, die eben noch hinzugefügten Teilmengen wieder von der Gesamtmenge wegzunehmen, bis keine Teilmenge mehr übrig bleibt. Der Gedanke, der hierfür Rechnung trägt ist der, dass in der Multiplikation die Division als Umkehrung bereits enthalten ist.



Für die visuelle Darstellung der Anzahl der Teilmengen und deren Größe sowie als Hilfsmittel bei der praktischen Anwendung der Multiplikation und Division wird ein umgebrochenes Zehnerfeld in der Aufteilung 5 Felder oben und 5 Feldern unten verwendet. Die jeweils besetzten Felder des Zehnerfeldes stellen bei der Multiplikation den Multiplikator, die Anzahl der Teilmengen, dar. Der Inhalt der Felder gibt die Größe einer Teilmenge wieder und ist damit gleichzusetzen mit dem Multiplikanden.



Bei der Division soll anfangs nur „aufgeteilt“ werden, um den Zusammenhang zur Multiplikation zu nutzen. Das Verteilen wird erst behandelt, nachdem ein tragfähiges Verständnis über die Multiplikation und Division erlangt ist. Bei der Division ergeben so die Anzahl der besetzten Felder

Inhalt

Zehnerfeld, Multiplikations- und Divisionskarten zum Erarbeiten der Punktrechnungen 1
Impressum 11

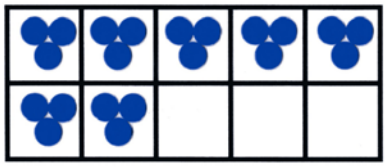
im Zehnerfeld den Wert des Quotienten und die Größe einer Teilmenge entspricht dem Divisor. Die Gesamtmenge ist mit dem Dividenden gleichgesetzt.

Bei der Einführung der Multiplikation und der Division wird bewusst auf die verschiedenen Wege des Erlernens verzichtet, die in aktuellen Schulbüchern gerne gleichzeitig und alternativ dargeboten werden. Gedacht ist dabei an die frühe Einführung von Tausch-Aufgaben, Einmaleins-Reihen „einfach“ auswendig zu lernen oder die Quadratzahlen zur Ableitung weiterer Aufgaben zu nutzen. Es wird zuerst ausschließlich ein direkter Bezug auf die Teile-Ganzes-Beziehung der Addition und Subtraktion genommen und über die oben aufgeführten Kernaufgaben weitere Aufgaben abgeleitet.

Wenn die Multiplikation und die Division gefestigt sind, können Anwendungen zu beiden Punktrechenarten thematisiert werden. Bei der Multiplikation folgt die Erarbeitung von verschiedenen Sachzusammenhängen und bei der Division wird das „Aufteilen“ durch das „Verteilen“ ergänzt.

Erlernen der Multiplikation und der Division – warum hierfür ein Zehnerfeld verwenden?

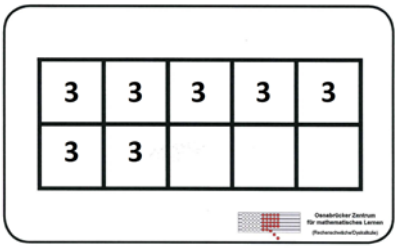
Im Zehnerfeld[1] lassen sich bei der Multiplikation und Division die gemeinsame Struktur von „Mal“ und „Geteilt“ unmittelbar, direkt auf einen Blick, visualisieren.



Die jeweils mit Chips besetzten Felder des Zehnerfeldes stellen bei der Multiplikation den Multiplikator, die Anzahl der Teilmengen, sprich die Wie-oft-Zahl, dar. Im Beispiel sind 7 Felder mit Chips ausgefüllt, also ergeben die Anzahl der besetzten Felder den Multiplikator 7. Der Inhalt eines Feldes gibt die Größe einer Teilmenge an und ist damit gleichzusetzen mit dem Multiplikanden. Hier sind es immer Dreier-Portionen, also ist die Größe einer Teilmenge 3.

Bei der Division entsprechen die Anzahl der besetzten Felder im Zehnerfeld dem Wert des Quotienten. Hier sind 7 Felder besetzt, also ist der Wert des Quotienten 7. Die Größe einer Teilmenge, der Divisor, also die Menge pro Feld, entspricht der Portion 3. Die Gesamtmenge, insgesamt 21 Chips, der Dividend, ist dargestellt als 7 Dreier-Portionen, die es aufzuteilen gilt.

Im Zehnerfeld kann auf einen Blick die Multiplikationsaufgabe über die Anzahl der besetzten Felder als 7 • 3 zerlegt in 5 • 3 + 2 • 3 sowie als fortgesetzte Addition als 3 + 3 + 3 + 3 + 3 ergeben 15 und 3 + 3 sind 6, 15 + 6 sind zusammen 21, abgelesen werden. Genauso lässt sich daraus die Divisionsaufgabe als inverse Operation 21 ÷ 3 als 15 ÷ 3 + 6 ÷ 3 = 5 + 2 = 7 erschließen. Es kommt das Distributivgesetz zum Einsatz.



Die Punktrechnungen, Multiplikation und Division, werden aus den Strichrechnungen der Addition und Subtraktion abgeleitet.

Begriffe zur Multiplikation am Erarbeitungsbeispiel

In der Lerntherapie im Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen werden zum besseren Verständnis der Multiplikation die Begriffe „Wie-oft-Zahl“, abgekürzt W (Multiplikator) verwendet, da dieser im Alltags-Sprachgebrauch auf die Anzahl der Teilmengen verweist und die „Portion“, abgekürzt P (Multiplikand), die Größe der jeweiligen Teilmenge wiedergibt[2].

Multiplikator: Anzahl der Teilmengen, Wie-oft-Zahl, abgekürzt W, Zähler der Teilmengen im Zehnerfeld. Frage nach dem Multiplikator: Wie viele Teilmengen bzw. wie viele Dreier-Portionen sind im Zehnerfeld?

Multiplikand: Größe einer Teilmenge, Portion, abgekürzt P. Frage nach dem Multiplikanden: Wie groß ist die jeweilige Teilmenge / Portion?

Wert des Produktes: Die Gesamtmenge, abgekürzt G, ist die Zusammenfassung aller Teilmengen. Frage nach dem Wert des Produktes/der Gesamtmenge: Wie viele sind es zusammen? Am Anfang ist es vorteilhaft, die Portion mit Einheiten wie Chips, Euro, Autos usw. zu versehen, um die Wie-oft-Zahl und die Portion deutlich voneinander zu unterscheiden.

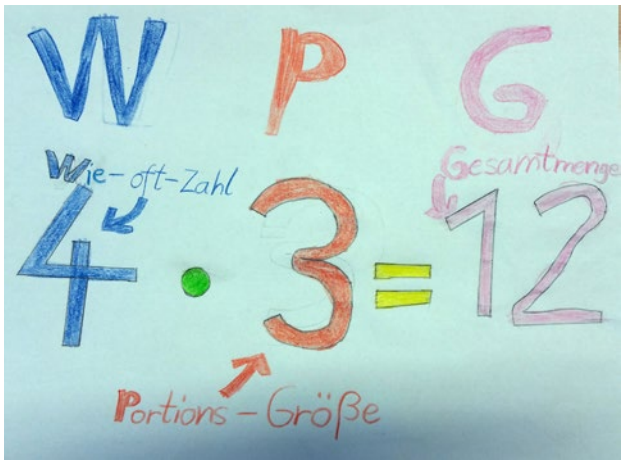
Additions-Multiplikations-Aufgabe:
3 + 3 + 3 + 3 = 4 • 3 = 12

Beim Erlernen der Multiplikation wird das Zehnerfeld zuerst unter Verwendung von Material wie Chips genutzt, um so den Schritt von der Mengenhandlung zur symbolischen Darstellung zu verdeutlichen: 3 Chips + 3 Chips + 3 Chips + 3 Chips = 4 • 3 Chips = 12 Chips.

1 Das Zehnerfeld wurde bereits im Zahlenraum bis 10 zum zählfreien Erkennen von Anzahlen und zur Erarbeitung der Zahlzerlegung verwendet. Wie die Zahlzerlegung unter Einbeziehung eines „umgebrochenen“ Zehnerfeldes erlernt werden kann, ist in der Ausgabe Kopf und Zahl Nr. 28 vorgestellt worden. Mit diesem Zehnerfeld lassen sich Strukturen wie 5 Kugeln in einer Reihe (Kraft der Fünf), Doppelstrukturen als 2, 4, 6, 8 und 10 darstellen und sind auf einen Blick zu erfassen. www.arbeitskreis-lernforschung.de (Downloads)

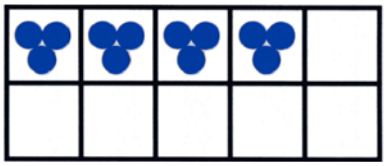
2 Vgl. „Geteilt! Das kann ich gar nicht!“, Birgit Heiser-Lohmann, 2018

©Kopf und Zahl, 31. Ausgabe



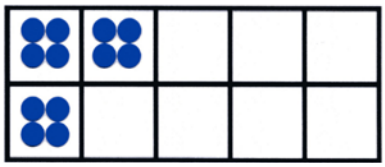
Im Weiteren wird an den beiden wertgleichen Multiplikationsaufgaben 4 • 3 und 3 • 4 erläutert, warum eine Differenzierung zwischen Multiplikator und Multiplikand elementar ist. Es ist nicht gleichgültig, wie viele Schulkinder behaupten: „Ist doch egal, bei Mal kann ich tauschen“, in welcher Einmaleins-Reihe gerechnet wird. Denn diese Aussage blamiert sich, wenn man Sachsituationen hierzu heranzieht. Es ist nicht das gleiche, ob 3 Gäste jeweils 4 Euro schenken oder ob 4 mal 3 Euro verschenkt werden, obwohl das Ergebnis wertgleich ist.

Im Zehnerfeld befinden sich 4 • 3 Chips.



- Gib die jeweilige Portion P (Größe einer Teilmenge) an. Wie groß ist jede Teilmenge?
  Antwort: Die Portion sind jeweils 3 Chips.
- Die Anzahl der Teilmengen, Wie-oft-Zahl W. Wie oft sind immer 3 Chips im Zehnerfeld?
  Antwort: 4-mal, weil 4 Felder besetzt sind.
- Schreibe die passende Plus-Aufgabe!
  Antwort: 3 Chips + 3 Chips + 3 Chips + 3 Chips = 12 Chips.
- Wie heißt die Malaufgabe?
  Antwort: 4 • 3 Chips = 12 Chips.
- Wie viele Chips sind es insgesamt?
  Antwort: Insgesamt sind es 12 Chips.

Im Zehnerfeld befinden sich 3 • 4 Chips.

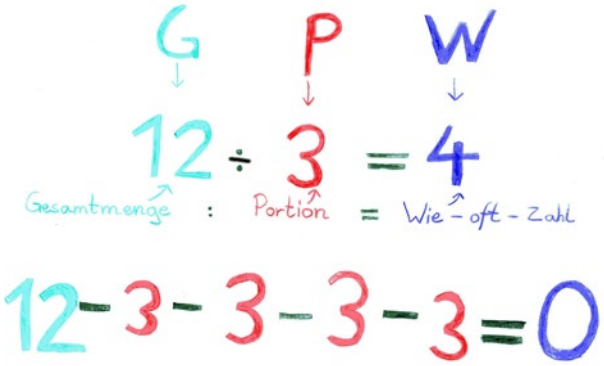


- Gib die jeweilige Portion P (Größe einer Teilmenge) an. Wie groß ist jede Teilmenge?
  Antwort: Die Portion sind jeweils 4 Chips.
- Die Anzahl der Teilmengen, Wie-oft-Zahl W. Wie oft sind immer 4 Chips im Zehnerfeld?
  Antwort: 3-mal, weil 3 Felder besetzt sind.
- Schreibe die passende Plus-Aufgabe!
  Antwort: 4 Chips + 4 Chips + 4 Chips = 12 Chips.
- Wie heißt die Malaufgabe?
  Antwort: 3 • 4 Chips = 12 Chips.
- Wie viele Chips sind es insgesamt?
  Antwort: Insgesamt sind es 12 Chips.

Begriffe zur Division (Aufteilen, fortgesetztes Wegnehmen) am Erarbeitungsbeispiel

Bei den folgenden Divisionsaufgaben im Zehnerfeld soll der Unterschied von 12 ÷ 3 und 12 ÷ 4 deutlich gemacht werden.

Zur Verdeutlichung sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die bei der Multiplikation bereits verwandten Begriffe „Wie-oft-Zahl“ und „Portion“ sich ebenfalls bei der Division wiederfinden.

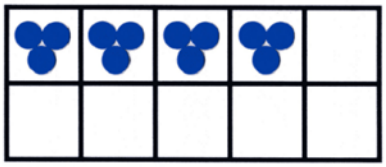


Dividend: Ist der Wert aller Teilmengen und damit die Gesamtmenge G. Dieser entspricht dem Wert des Produkts bei der Multiplikation.

Divisor: „Portion“, abgekürzt P, ist die Größe einer Teilmenge und entspricht dem Multiplikanden. Die „Portion“ ist der Inhalt eines Feldes im Zehnerfeld.

Wert des Quotienten: Im Zehnerfeld ist die „Wie-oft-Zahl“ W, die Summe der ausgefüllten Felder. Dieser kann simultan oder quasi-simultan durch Zerlegung in 2 Teilmengen erfasst werden.

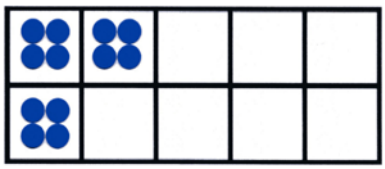
Im Zehnerfeld befinden sich 12 Chips.



- Gib die jeweilige Portion P (Größe einer Teilmenge) an. Wie groß ist jede Teilmenge?
  Antwort: Die Portion sind jeweils 3 Chips.

- Wie viele Chips sind es insgesamt, welches ist die Gesamtmenge G?
  Antwort: Es sind 12 Chips**.**
- Wie viele Teilmengen sind es? Wie oft sind immer 3 Chips im Zehnerfeld?
  Antwort: 4-mal, weil 4 Felder besetzt sind.
- Wie oft kannst du von 12 Chips immer 3 Chips wegnehmen bis null Chips übrig bleiben?
  Antwort: 4-mal, weil 4 Felder besetzt sind.
- Schreibe die passende Minus-Aufgabe!
  Antwort: 12 Chips - 3 Chips - 3 Chips - 3 Chips - 3 Chips = 0 Chips.
- Wie heißt die Geteilt-Aufgabe?
  Antwort: 12 Chips ÷ 3 Chips = 4.

Im Zehnerfeld befinden sich 12 Chips.



- Gib die jeweilige Portion P (Größe einer Teilmenge) an. Wie groß ist jede Teilmenge?
  Antwort: Die Portion sind jeweils 4 Chips.
- Wie viele Chips sind es insgesamt, wie groß ist die Gesamtmenge G?
  Antwort: Es sind 12 Chips.
- Bestimme die Anzahl der Teilmengen, die Wie-oft-Zahl W. Wie oft sind immer 4 Chips im Zehnerfeld?
  Antwort: 3-mal, weil 3 Felder besetzt sind.
- Wie oft kannst du von 12 Chips immer 4 Chips wegnehmen bis null Chips übrig bleiben? Schreibe die passende Minus-Aufgabe!
  Antwort: 12 Chips - 4 Chips - 4 Chips - 4 Chips = 0 Chips.
- Wie heißt die Geteiltaufgabe?
  Antwort: 12 Chips ÷ 4 Chips = 3.

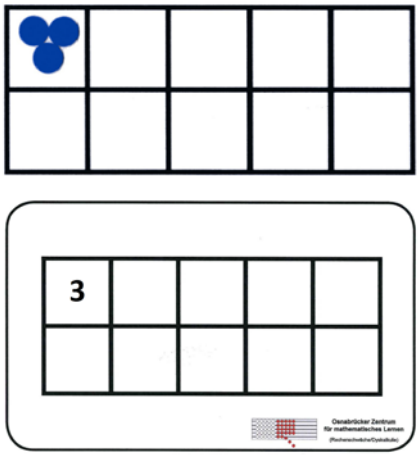
Wie sind die inversen Operationen von Multiplikation und Division zu erarbeiten?

Die Kernaufgaben des Einmaleins und des Einsdurcheins mit 3

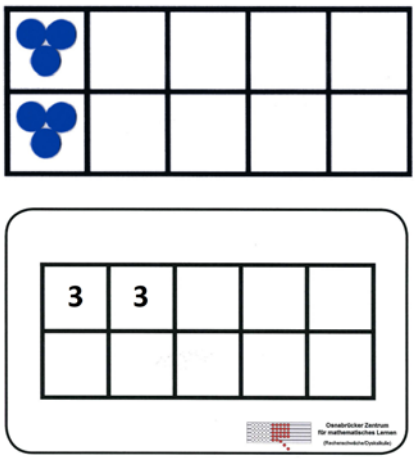
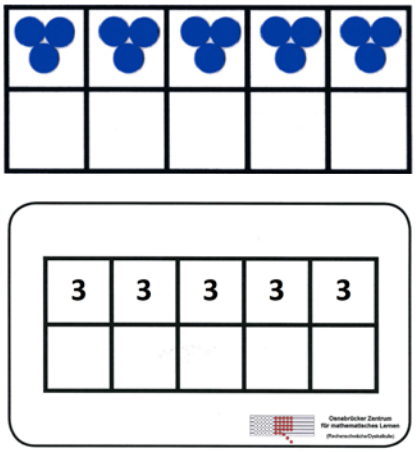
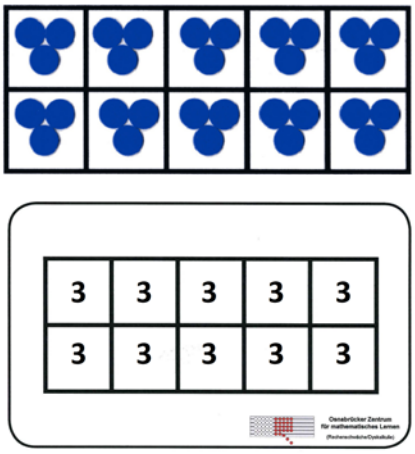
Mit den Kernaufgaben ist es möglich, ein Stützgerüst für alle sich daran anschließenden Ableitungsaufgaben zu erarbeiten. Die Kernaufgaben, auch Königsaufgaben genannt, prägen sich gut ein, da sie in jeder Einmaleins-Reihe die Grundlage sind. Voraussetzung für die Anwendung von Kern- und Ableitungsaufgaben ist es, dass plus und minus im Zahlenraum bis 100 als Kopfrechenleistung gekonnt wird. Bei der Multiplikation lassen sich die Kernaufgaben 1 • 3, 2 • 3, 5 • 3 und 10 • 3 über das Verdoppeln und durch Halbieren der Wie-oft-Zahl erarbeiten. Die Ableitungsaufgaben 3 • 3, 4 • 3, 6 • 3, 7 • 3, 8 • 3, 9 • 3 werden additiv bzw. subtraktiv ermittelt. Aus diesem Aufbau ergeben sich die Kern- und Ableitungsaufgaben zur Division. Die Kernaufgaben werden hier exemplarisch am Einmaleins und Einsdurcheins mit 3 gezeigt.

1 • 3 = 3	2 • 3 = 6
5 • 3 = 15	10 • 3 = 30
3 ÷ 3 = 1	6 ÷ 3 = 2
15 ÷ 3 = 5	30 ÷ 3 = 10

Im Folgenden stellen wir beispielhaft am Einmaleins und Einsdurcheins mit 3 dar, wie unter Verwendung eines Zehnerfeldes die Kernaufgaben zur Multiplikation und zur Division erarbeitet werden können. Da es sich in dem nachfolgenden Beispiel um Aufgaben aus dem Einmaleins und Einsdurcheins mit 3 handelt, ist die Größe einer Teilmenge also die Portion 3.

Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W, Multiplikator)	**Im Zehnerfeld kann die Größe einer Teilmenge (Portion, P) und die Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W) abgelesen werden**	**Additions- und Multiplikationsaufgabe**	**Subtraktions- und Divisionsaufgabe**
1 • □		0+3 = 1•3 = 3	3–3 = 0 3÷3 = 1

©Kopf und Zahl, 31. Ausgabe

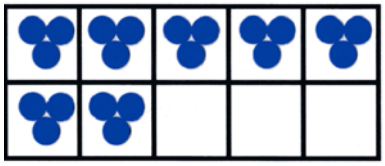
Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W, Multiplikator)	Im Zehnerfeld kann die Größe einer Teilmenge (Portion, P) und die Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W) abgelesen werden	Additions- und Multiplikationsaufgabe	Subtraktions- und Divisionsaufgabe
Verdoppeln **2 • ☐** 1 • ☐ + 1 • ☐		3+3 = 2•3 = 6	6–3–3 = 0 6÷3 = 2
5 • ☐ Die Hälfte von 10 • ☐ ist 5 • ☐		3+3+3+3+3 = 5•3 = 15	15–3–3–3–3–3 = 0 15÷3 = 5
10 • ☐ Das Doppelte von 5 • ☐ ist 10 • ☐		3+3+3+3+3+3+3+3+ 3+3 = 10•3 = 30	30–3–3–3–3–3–3– 3–3–3–3= 0 30÷3 = 10

Die Ableitungsaufgaben am Beispiel des Einmaleins und Einsdurcheins mit 3

Ausgehend von den Kernaufgaben werden die Ableitungsaufgaben additiv und subtraktiv erschlossen. Die Reihenfolge der Erarbeitung der Ableitungsaufgaben für die Multiplikation und Division am Einmaleins und Einsdurcheins mit 3 ist ein Anwendungsvorschlag und könnte folgendermaßen aussehen:

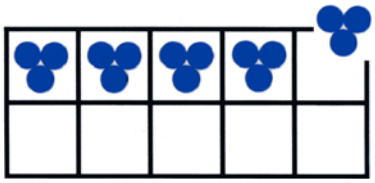
3 • 3 = 9	4 • 3 = 12	6 • 3 = 18
7 • 3 = 21	8 • 3 = 24	9 • 3 = 27
9 ÷ 3 = 3	12 ÷ 3 = 4	18 ÷ 3 = 6
21 ÷ 3 = 7	24 ÷ 3 = 8	27 ÷ 3 = 9

Bei den Ableitungen der Multiplikations- bzw. Divisionsaufgaben wird nun mithilfe der Kernaufgaben, unter Anwendung des Distributivgesetzes, jede Aufgabe



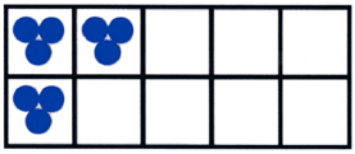
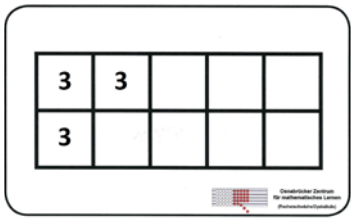
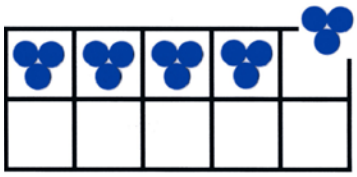
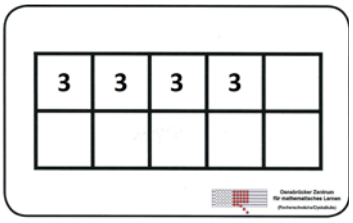
in zwei Schritten bestimmt. Bei der Malaufgabe 7 mal 3 bedient man sich der Kernaufgaben 5 • 3 und 2 • 3, sodass sich folgende Ableitung ergibt: 7 • 3 = 5 • 3 + 2 • 3 = 15 + 6 = 21.

Bei der Aufgabe 21 ÷ 3 bedient man sich zweier Kernaufgaben 15 ÷ 3 und 6 ÷ 3, da 21 um 6 größer als 15 ist, sodass sich folgende Ableitung ergibt: 21 ÷ 3 = 15÷3 + 6÷3 = 5+2 = 7. Im Zehnerfeld lassen sich die Schritte visuell nachvollziehen und die Verbindung von Plus- und Minus bei Mal und Geteilt anwenden. Eine volle 5er-Reihe mit jeweils 3 Chips sind 15 Chips und in der nächsten Reihe 2 Felder mit jeweils 3 Chips sind 6 Chips, diese ergeben insgesamt 21 Chips. 5 Dreier-Portionen und 2 Dreier-Portionen ergeben 7 Dreier-Portionen.



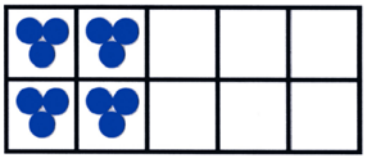
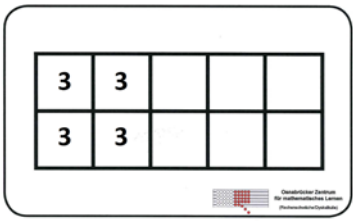
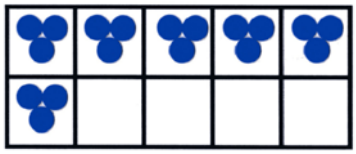
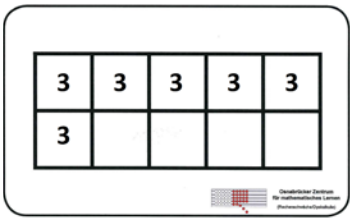
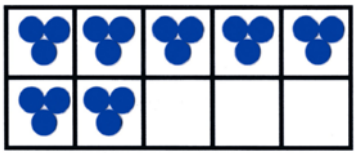
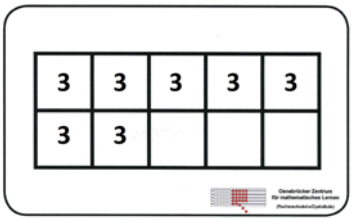
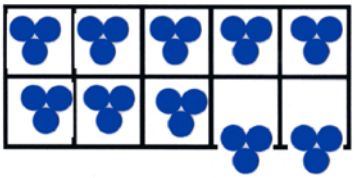
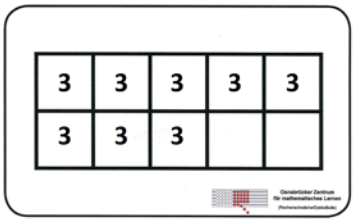
Die Kernaufgabe 15÷3 kann auch als Ausgangspunkt für die Ermittlung des Ergebnisses von 12÷3 dienen. 15÷3 ist gleich 5. 12 ist um 3 weniger als 15, also ist 12÷3 gleich 4. Dabei muss auf der Mengenebene mit hypothetisch vorhandenen Objekten operiert werden: Wenn man 15 Objekte hätte, könnte man 5 Dreier-Portionen erstellen. Man hat aber tatsächlich 3 Objekte weniger, nämlich nur 12 Objekte, zur Verfügung. Daher kann man nur 4 Dreier-Portionen erstellen (aufteilen).[3] Die hypothetisch vorhandenen 15 Objekte werden im Zehnerfeld präsentiert, indem 4 Felder besetzt und ein Feld frei ist. Die eine hypothetisch gedachte Dreier-Portion wird erst im Zehnerfeld präsentiert und anschließend – noch sichtbar – aus dem Zehnerfeld entfernt, 12 ist 15 – 3.

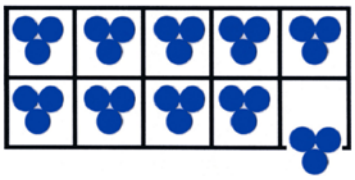
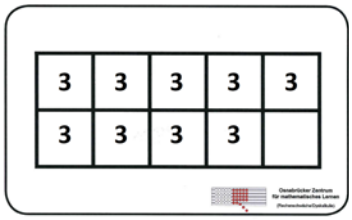
3 Vergleiche Meyerhöfer, ebenda, S.116

Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W Multiplikator)	**Im Zehnerfeld kann die Größe einer Teilmenge (Portion, P) und die Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W) abgelesen werden**	**Additions- und Multiplikationsaufgabe**	**Subtraktionsaufgabe und Divisionsaufgabe**
3 • □ 2•3 + 1•3	 	3+3+3 = 3•3 Rechenweg*: 2•3 + 1•3 = 6 + 3 = 9	9–3–3–3 = 0 9÷3 Rechenweg: 9÷3 = 6÷3 + 3÷3 = 2 + 1 = 3
4 • □ 5•3 – 1•3	 	3+3+3+3 = 4•3 Rechenweg: 4•3 = 5•3 – 1•3 = 15 – 3 = 12	12–3–3–3–3 = 0 12÷3 Rechenweg: 12÷3 = 15÷3 – 3÷3 = 5 – 1 = 4

* Ziel ist es, das Einmaleins und Eindurcheins zu automatisieren.

©Kopf und Zahl, 31. Ausgabe

Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W Multiplikator)	**Im Zehnerfeld kann die Größe einer Teilmenge (Portion, P) und die Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W) abgelesen werden**	**Additions- und Multiplikationsaufgabe**	**Subtraktionsaufgabe und Divisionsaufgabe**
Verdoppeln **4 • □** 2•3 + 2•3	 	3+3+3+3 = 4•3 Rechenweg: 4•3 = 2•3 + 2•3 = 6 + 6 = 12	12–3–3–3–3 = 0 12÷3 Rechenweg: 12÷3 = 6÷3 + 6 ÷3 = 2 + 2 = 4
6 • □ 5•3 + 1•3	 	3+3+3+3+3+3 = 6•3 Rechenweg: 6•3 = 5•3 + 1•3 = 15 + 3 = 18	18–3–3–3–3–3–3 = 0 18÷3 Rechenweg: 18÷3 = 15÷3 + 3÷3 = 5 + 1 = 6
7 • □ 5•3 + 2•3	 	3+3+3+3+3+3+3 = 7•3 Rechenweg: 7•3 = 5•3 + 2•3 = 15 + 6 = 21	21–3–3–3–3–3–3–3 = 0 21÷3 Rechenweg: 21÷3 = 15÷3 + 6÷3 = 5 + 2 = 7
8 • □ 10•3 – 2•3	 	3+3+3+3+3+3+3+3 = 8•3 Rechenweg: 8•3 = 10•3 – 2•3 = 30 – 6 = 24	24–3–3–3–3–3–3–3–3 = 0 24÷3 Rechenweg: 24÷3 = 30÷3 – 6÷3 = 10 – 2 = 8

Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W Multiplikator)	Im Zehnerfeld kann die Größe einer Teilmenge (Portion, P) und die Anzahl der Teilmengen (Wie-oft-Zahl, W) abgelesen werden	Additions- und Multiplikationsaufgabe	Subtraktionsaufgabe und Divisionsaufgabe
9 • □ 10•3 – 1•3	 	3+3+3+3+3+3+3+ 3+3 = 9•3 Rechenweg: 9•3 = 10•3 – 1•3 = 30 – 3 = 27	27–3–3–3–3–3–3–3–3–3 = 0 27÷3 Rechenweg: 27÷3 = 30÷3 – 3÷3 = 10 – 1 = 9

Kernaufgaben und Ableitungsaufgaben (vgl. W. Meyerhöfer) sollten über die Mengen und deren Verknüpfung mit der symbolischen Darstellung erarbeitet werden. Meyerhöfer skizzierte diesen Lernweg, indem er folgende Aussage tätigte: „Andererseits soll die reflektierte Verwendung der Ableitungen das Verständnis der Multiplikation als wiederholte Addition festigen, damit Sachprobleme als multiplikative erkannt werden können. Dazu ist es nötig, die Verbindung zwischen der verbal-symbolischen Ebene und der Mengenebene stets präsent zu halten.“[4] Dies ist nicht nur für die Multiplikation wesentlich, auch für die Division ist die Verknüpfung der Ebenen genauso wichtig, weil die Division die Umkehrung der Multiplikation ist. Um bei der praktischen Anwendung systematisch zwischen der Anzahl der Teilmengen und der Größe einer Teilmenge zu unterscheiden, ist es eine Hilfe, die Teilmengen, die den Wert der Summe ergeben, mit einer Einheit zu versehen und hierfür Beispiele aus dem Alltag der Schüler zu wählen. So lässt sich die Aufgabe 4 • 3 = 12 hilfreich unter Hinzufügen einer Einheit als 4 • 3 Euro = 12 Euro darstellen. Dieser Sachverhalt als Division interpretiert lautet: Klaus hat 12 Euro. Wie oft kann er von 12 Euro jeweils 3 Euro wegnehmen bis null Euro übrig bleiben? In unseren Ausführungen arbeiten wir mit Chips, ein „neutrales“ Material, das durch Euro, Blumen, Äpfel oder eine andere Einheit ersetzt werden kann.

4 Ebenda, S. 105

Multiplikations- und Divisionskarten

Automatisieren des Einmaleins und Einsdurcheins mit Multiplikations- und Divisionskarten[5]

Auf der Vorderseite der Multiplikations- bzw. Divisionskarten steht die jeweilige Kern- bzw. Ableitungsaufgabe. Auf der Rückseite der Kärtchen befinden sich nicht einfach nur die richtigen Lösungen, die Ergebnisse sind um Lösungshinweise mittels des Distributivgesetzes ergänzt. Bei einigen Karten finden sich nur Lösungshinweise, ohne dass das Ergebnis angegeben ist. Der Schüler ist dann gehalten, den Rechenweg selbst nachzuvollziehen und die Berechnung auszuführen. Damit wird Sorge getragen, dass die Punktrechnungen mit Verständnis gelernt werden. Exemplarisch stellen wir nachfolgend die Karten aus dem Einmaleins und dem Einsdurcheins mit 3 vor. Wir beginnen wieder mit den Kernaufgaben.

Die Kernaufgaben

Aus 1•3 = 3 wird durch Verdoppeln 2•3 = 6.
Wenn in 3 eine Dreier-Portion enthalten ist,
dann sind es in 6 zwei Dreier-Portionen.

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
1·3 = 2·3 =	1·3 = 3 2·3 = 6	3÷3 = 6÷3 =	3÷3 = 1 6÷3 = 2

5 Es ist empfehlenswert, die Einmaleins/Einsdurcheins-Karten auf dickerem Kartonpapier bspw. 160 g Papier auszudrucken. Auf der Vorderseite stehen die Aufgaben, auf der Rückseite die Kern-und Ableitungsaufgaben mit den Lösungen bzw. Lösungswegen. Die Karten sind unter www.arbeitskreis-lernforschung.de (Downloads) herunter zu laden.

©Kopf und Zahl, 31. Ausgabe

Aus 10•3 = 30 wird durch Halbieren 5•3 = 15.
Wenn in 30 zehn Dreier-Portion enthalten sind,
dann sind es in 15 fünf Dreier-Portionen.

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
10·3 = 5·3 =	10·3 = 30 5·3 = 15	30÷3 = 15÷3 =	30÷3 = 10 15÷3 = 5

Ableitungsaufgaben – Verdoppeln/Halbieren

Aus 2•3 = 6 werden durch Verdoppeln 4•3 = 12.
Wenn in 6 zwei Dreier-Portion enthalten sind,
dann sind es in 12 vier Dreier-Portionen.

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
4·3 =	4·3 = 2·3 = 6 2·3 = 6	6÷3 = 12÷3 =	6÷3 = 2 12÷3 = 4

Ableitungsaufgaben – Distributivgesetz – additiv

Aus 2•3 wird 3•3 und aus 6÷3 wird 9÷3

Zu 2•3 kommt 1•3 hinzu, um 3•3 zu ermitteln.
2•3 + 1•3 = 6 + 3 = 9

In 9÷3 sind 6÷3 und 3÷3 enthalten.
9÷3 = 6÷3 + 3÷3 = 2 + 1 = 3

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
2·3 = 3·3 =	2·3 = 6 3·3 = 9	9÷3 =	9÷3 = 3

Aus 5•3 wird 6•3 und aus 15÷3 wird 18÷3

Zu 5•3 kommt 1•3 hinzu, um 6•3 zu ermitteln.
6•3 = 5•3 + 1•3 = 15 + 3 = 18

In 18÷3 sind 15÷3 und 3÷3 enthalten.
18÷3 = 15÷3 + 3÷3 = 5 + 1 = 6

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
6·3 =	5·3 = 15 1·3 = 6·3 =	18÷3 =	15÷3 = 5 3÷3 = 18÷3 =

Aus 5•3 wird 7•3 und aus 15÷3 wird 21÷3

Zu 5•3 kommen 2•3 hinzu, um 7•3 zu ermitteln.
7•3 = 5•3 + 2•3 = 15 + 6 = 21

In 21÷3 sind 15÷3 und 6÷3 enthalten.
21÷3 = 15÷3 + 6÷3 = 5 + 2 = 7

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
7·3 =	7·3 = 21 5·3 = 15 2·3 = 6	21÷3 =	15÷3 = 5 6÷3 = 21÷3 =

Ableitungsaufgaben – Distributivgesetz – subtraktiv

Aus 10•3 wird 8•3 und aus 30÷3 wird 24÷3

8•3 ist um 2•3 weniger als 10•3.
8•3 = 10•3 – 2•3 = 30 – 6 = 24

In 30÷3 sind 24÷3 und 6÷3 enthalten.
24÷3 = 30÷3 – 6÷3 = 10 – 2 = 8

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
8·3 =	8·3 = 24 10·3 = 30 2·3 = 6	24÷3 =	30÷3 = 10 6÷3 = 2 24÷3 = 8

Aus 10•3 wird 9•3 und aus 30÷3 wird 27÷3

9•3 ist um 1•3 weniger als 10•3.
9•3 = 10•3 – 1•3 = 30 – 3 = 27

In 30÷3 sind 27÷ 3 und 3÷3 enthalten.
27÷3 = 30÷3 – 3÷3 = 10 – 1 = 9

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
9·3 =	10·3 = 30 1·3 = 3 9·3 = 27	27÷3 =	30÷3 = 10 3÷3 = 1 27÷3 =

Ableitungsaufgaben – Distributivgesetz – Großes Einmaleins/Einsdurcheins

Aus 10•3 wird 12•3 und aus 30÷3 wird 36÷3

12•3 ist um 2•3 mehr als 10•3.
12•3 = 10•3 + 2•3 = 30 + 6 = 36

In 36÷3 sind 30÷3 und 6÷3 enthalten.
36÷3 = 30÷3 + 6÷3 = 10 + 2 = 12

Vorderseite	Rückseite	Vorderseite	Rückseite
12·3 =	10·3 = 30 2·3 = 6 12·3 = 36	30÷3 = 36÷3 =	30÷3 = 10 36÷3 = 12

Operationsverständnis der Multiplikation und der Division erlangen

Werden Schüler zu dieser systematischen Erarbeitung der Einmaleins- und der Einsdurcheinsreihen angehalten, erweitern sich Schritt für Schritt die Möglichkeiten, noch nicht gelernte Aufgaben zu erschließen. Wird z. B. bereits die Quadratzahl von 6 als 6 • 6 sind 36 gewusst, kann im Sinne der hier vorgestellten Strategie, die nicht auswendig gewusste Aufgabe 7 • 6, über 36 plus 6 abgeleitet werden.

Sind die Aufgaben mit dem Zehnerfeld und den Übungskarten automatisiert, heißt es nun, Sachaufgaben zur Multiplikation mit Alltags- und Umweltbezügen wie in der Abbildung, 9 • 6 Smarties sind 54 Smarties, zu erarbeiten.

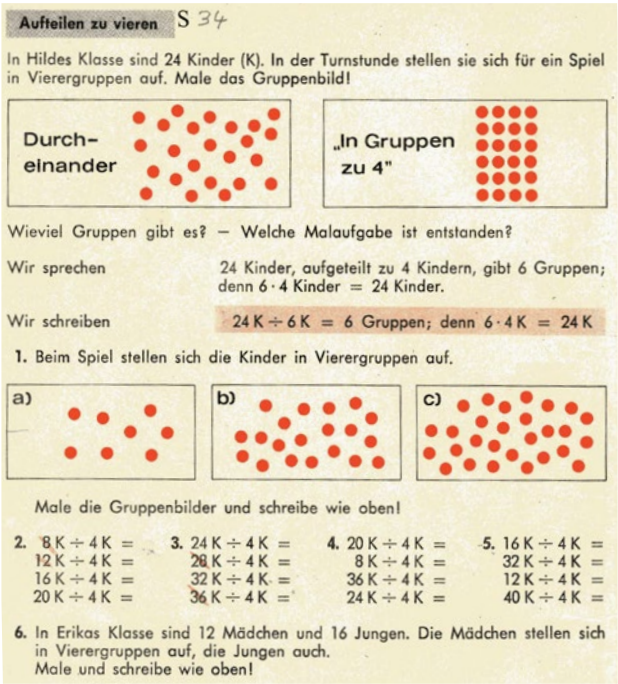
Hier ist folgende Fragestellung für Schüler denkbar: „Welche Multiplikationsaufgabe passt zu diesem Bild eines Kindergeburtstages?“ Diese Frage intendiert in der Regel die Aufgabe 9 • 6 Smarties, ebenso wäre die Frage nach 9 • 1 Kuchen möglich. Es verbergen sich in diesem Bild zwei Multiplikationsaufgaben, je nachdem, ob nach der Anzahl der Kuchen oder der Smarties gefragt wird. Die unterschiedlichen Fragestellungen gilt es mit den Schülern zu besprechen. Für sinnvoll erachten wir solche Erörterungen jedoch erst dann, wenn die Multiplikation, wie oben ausgeführt, schon in ihrer Grundstruktur erfasst wird. Sind auch solche Sachaufgaben verstanden, folgen dann die Tauschaufgaben und die verschiedenen Thematiken zur Multiplikation, wie die räumlich-simultanen und zeitlich-sukzessiven Anwendungen.

Aufteilen und Verteilen

Ist die Division als „Aufteilen“ verstanden, dann kann sie später leicht um das „Verteilen“ ergänzt werden. Ausgehend von einer gegebenen Gesamtmenge (Dividend) ist beispielsweise bei einer Divisions-Aufgabe die Größe einer Portion bekannt, kann auf die Anzahl der Teilmengen durch Aufteilen geschlossen werden. Wenn im Unterschied dazu die Anzahl der Teilmengen vorgegeben ist, kann beim Verteilen die Größe der Portion ermittelt werden. Das Aufteilen ist die Frage nach der Anzahl der Teilmengen und das Verteilen nach der Größe einer Teilmenge.

Sachaufgaben zum Aufteilen und Verteilen sollen auf der Grundlage der automatisierten Zahlensätze durchdrungen werden. Hierbei gilt es jeweils zu bestimmen, ob die Anzahl der Teilmengen zu errechnen sind oder ob die Anzahl der Elemente einer Teilmenge ausgerechnet werden sollen. Es werden beim „Verteilen“ Bonbons an Kinder „verteilt“ und es soll ermittelt werden, wie viele Bonbons jedes Kind bekommt. Anders ist es beim „Aufteilen“. Hier gilt es, eine festgelegte Anzahl an Bonbons zu portionieren. Es ist die Frage danach zu stellen: Wie viele Tüten können gefüllt werden?

Landläufig wird die Division als die Grundrechenart gesehen, die am schwersten zu erlernen ist. So kann verschiedenen Sachsituationen dieselbe Divisionsaufgabe zugeordnet werden. Ohne Kontext des Aufteilens oder Verteilens ist es nicht möglich, bei der Aufgabe 24 geteilt durch 6 eine eindeutige verinnerlichte Vorstellung zu entwickeln. Die Aufgabe kann als 4 Häufchen zu je 6 oder 6 Häufchen mit jeweils 4 Elementen illustriert werden. Prof. W. Oehl[6] (1962, S. 62f) hat in seinen Schulbüchern, die in den sechziger und siebziger Jahren als Lehrwerke in den Schulen eingesetzt wurden, unterschiedliche Rechenzeichen für das Aufteilen (÷) und das Verteilen (:)[7] verwendet, um von vornherein die Doppelsichtigkeit der Division zu



Aufteilen zu vieren S 34

In Hildes Klasse sind 24 Kinder (K). In der Turnstunde stellen sie sich für ein Spiel in Vierergruppen auf. Male das Gruppenbild!

Durch-einander

„In Gruppen zu 4“

Wieviel Gruppen gibt es? – Welche Malaufgabe ist entstanden?

Wir sprechen: 24 Kinder, aufgeteilt zu 4 Kindern, gibt 6 Gruppen; denn 6 · 4 Kinder = 24 Kinder.

Wir schreiben: 24 K ÷ 6 K = 6 Gruppen; denn 6 · 4 K = 24 K

1. Beim Spiel stellen sich die Kinder in Vierergruppen auf.

a) b) c)

Male die Gruppenbilder und schreibe wie oben!

2. 8 K ÷ 4 K =
12 K ÷ 4 K =
16 K ÷ 4 K =
20 K ÷ 4 K =

3. 24 K ÷ 4 K =
28 K ÷ 4 K =
32 K ÷ 4 K =
36 K ÷ 4 K =

4. 20 K ÷ 4 K =
8 K ÷ 4 K =
36 K ÷ 4 K =
24 K ÷ 4 K =

5. 16 K ÷ 4 K =
32 K ÷ 4 K =
12 K ÷ 4 K =
40 K ÷ 4 K =

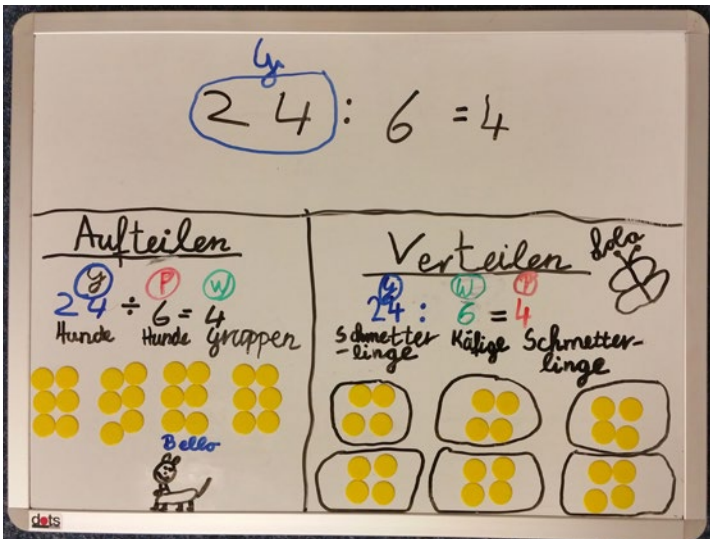
6. In Erikas Klasse sind 12 Mädchen und 16 Jungen. Die Mädchen stellen sich in Vierergruppen auf, die Jungen auch.
Male und schreibe wie oben!

6 W. Oehl, Die Welt der Zahl 2, 1966

7 Wikipedia: In Deutschland wird in der Schulmathematik bevorzugt der Doppelpunkt für das Dividieren eingesetzt (:), ein Doppelpunkt mit Mittenstrich (÷) ist auf Taschenrechnern zu finden. Geschichtlich: Johann Rahn führte das aus dem Doppelpunkt und Strich zusammengesetzte Divisionszeichen 1659 ein.

©Kopf und Zahl, 31. Ausgabe

Ein Praxisbeispiel: 24 ÷ 6 = 4 ; 24 : 6 = 4



Aufteilen: Die Gesamtmenge umfasst 24 Hunde. Es sollen jeweils 6 Hunde in eine Gruppe. Wie viele Gruppen können gebildet werden? Antwort: 4 Gruppen.

Verteilen: Die Gesamtmenge 24 Schmetterlinge sollen auf 6 Käfige verteilt werden. Wie viele Schmetterlinge kommen in einen Käfig? Antwort: 4 Schmetterlinge.

Hier wird der Unterschied beider Divisionsverfahren skizziert: Einmal sind es 4 • 6 Chips = 24 Chips (aufteilen), in dem anderen Beispiel sind es 6 • 4 Chips = 24 Chips (verteilen).

trennen. Durch die unterschiedlichen Rechenzeichen besteht die Möglichkeit darauf hinzuweisen, welches Verfahren (Aufteilen oder Verteilen) anzuwenden ist. Um eine weitere Differenzierung zwischen beiden Verfahren kenntlich zu machen, ist bei kleinen Sachaufgaben wie: „*24 Äpfel werden immer zu je 6 Äpfel in Tüten aufgeteilt*“ zusätzlich immer die Einheit (Größe einer Teilmenge = 6 Äpfel) vorgegeben worden, 24 Äpfel ÷ 6 Äpfel = 4 Tüten. Beim Verteilen: „*24 Äpfel werden auf 6 Tüten verteilt. Wie viele Äpfel kommen in eine Tüte?*“ 24 Äpfel : 6 Tüten = 4 Äpfel/Tüte. Diese Idee hat den Autoren eingeleuchtet, weil so die Doppelsichtigkeit der Division und damit die besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Division vermieden werden.

Fazit und eine Anmerkung der Autoren

Wenn Sie hier angelangt sind, haben Sie eine andere Art, als sie in den Schulbüchern vorherrscht, kennengelernt, wie die Multiplikation/Division vermittelt werden kann. In der Regel wird in der Didaktik unter dem Titel „Vernetzung“ nahezu ein Feuerwerk an verschiedenen Ideen des Zugangs zu den Punktrechenarten präsentiert. Die Autoren haben die praktische Erfahrung gemacht, dass es nicht nur für „rechenschwache“ Kinder ein Problem darstellt, diese Vielfalt an Ideen zu selektieren, sodass letztendlich, in Schule und Elternhaus, das blinde „Pauken“ die Oberhand gewinnt. Wir möchten Ihnen Mut machen, mit dem Zehnerfeld nicht nur die Zahlzerlegung zu erarbeiten, sondern auch der Multiplikation und Division „zu Leibe zu rücken“.

Literatur:

Oehl, Wilhelm 1962, Der Rechenunterricht in der Grundschule, Hannover

Oehl, Wilhelm, Die Welt der Zahl 2, Hannover, Schrödel Verlag, 1966

Kopf und Zahl Nr. 7 und 28, Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V. http://www.os-rechenschwaeche.de/kopf_und_zahl.html

Meyerhöfer, Wolfram, Basisqualifizierung ProGrundbildung, Rechnen lernen und Rechnen lehren, VHS, Deutscher Volkshochschulverband, Bonn 2015, Wolfram Meyerhöfer https://www.grundbildung.de/fileadmin/content/Qualifizieren/Modul_6_Teile_1_2.pdf

Heiser-Lohmann, Birgit „Geteilt! Das kann ich gar nicht!“ – Einführung der Division in der Dyskalkulie-Therapie, ein neuer Weg auf alten Pfaden“, 2018, Hausarbeit im Rahmen der Weiterbildung zur integrativen Dyskalkulie-Therapeutin, Zentrum für angewandte Lernforschung gGmbH, www.arbeitskreis-lernforschung.de (Downloads)

Gerster & Schultz 2004, Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund; Katja Rochmann, Osnabrück
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

Aus dem Fortbildungsangebot des OZmL

„Was Fehler erzählen können …“ „Die Analyse des kindlichen Denkens ist der erste Schritt zur Problemlösung.“

Wie in den vergangenen Jahren möchten wir Sie wieder auf unser Fortbildungsangebot aufmerksam machen. Alle Fortbildungsveranstaltungen beinhalten Basiswissen über Rechenschwäche/Dyskalkulie und Anregungen für einen vorbeugenden Unterricht bzw. für Fördermaßnahmen sowie Erfahrungen und Schwierigkeiten bei deren Umsetzung. Ziel ist es, gemeinsam die Kompetenz zur Früherkennung und zur Vermeidung von mathematischen Lernschwierigkeiten zu erhöhen.

LEA-0

Eine Veranstaltung, die sich insbesondere an pädagogische Fachkräfte des Kindergartens und Lehrkräfte im Erstunterricht der Grundschule richtet. Was sind sinnvolle Konzepte, um Kindern begreiflich zu machen, dass sich Zahlen aus anderen Zahlen zusammensetzen? Welche Grundlagen müssen Kinder entwickelt haben, wenn sie darauf aufbauend die sogenannte Teile/Ganzes-Struktur von Zahlen und von plus und minus verstehen sollen?

Mit dieser und mit anderen Fragen beschäftigt sich das ganztägige Seminar „LEA-0“. Es werden ein Screening sowie praxisnahe spielerische Anregungen auf der Fortbildung vorgestellt und gemeinsam erprobt.

LEA-1 und LEA-2

Basiswissen von den Grundrechenarten ausbilden, dieser Anforderung widmen sich diese beiden ganztägigen Fortbildungen.

LEA-1: Der Schwerpunkt dieser Fortbildung liegt in unterrichtspraktischen Hilfen für den Erwerb elementarer arithmetischer Einsichten – sei es innerhalb des Klassenverbandes oder im spezifischen Förderunterricht. Ziel der Fortbildung ist es, Grundzüge der Arithmetik der Schuleingangsphase und Wege der Vermittlung von Kernkompetenzen zunächst im Zahlenraum bis zehn zu diskutieren. In der Fortbildung LEA-1 wird auch das im OZmL entwickelte Schüttelbox-Programm vorgestellt.

LEA-2: Das Dezimalsystem ist ein weiteres elementares Stoffgebiet der Mathematik. Um das Rechnen mit Zehnern und Einern zu verstehen und tragfähige Strategien für den Zehnerüberübergang zu entwickeln, müssen Kinder begreifen wie das dezimale Stellenwertsystem funktioniert.

Sie brauchen ein Grundwissen von der Stellenwertlogik und vom Rechnen mit Zehnern und Einern.

Diese Fortbildung beinhaltet auch exemplarische fachdidaktische Anregungen zur Vermittlung der aufbauenden Rechenarten Multiplikation und Division.

Weitere Informationen finden Sie im Internet unter:

http://www.os-rechenschwaeche.de/fortbildungen.html

Sprechen Sie „Ihre“ Schule an. Kontaktieren Sie uns zur Terminvereinbarung.

- Förderdiagnose
- Beratung
- Lerntherapie

Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

(Rechenschwäche/Dyskalkulie)

Osnabrück / Diepholz / Herford / Münster / Rheine
Kollegienwall 28 a/b, 49074 Osnabrück

Telefonsprechstunde:
Mo. bis Fr. von 12.00 – 14.00 Uhr
Tel.: 0541 - 2052242, Fax: 0541 - 2052244
E-Mail: os-zentrum@t-online.de
Internet: www.os-rechenschwaeche.de

Unser Zentrum arbeitet seit 1997 mit rechenschwachen Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen.

Unsere Aufgabenbereiche umfassen:
- qualitative Förderdiagnostik
- Beratung von Betroffenen, Eltern und Lehrern
- integrative Dyskalkulietherapie
- Informationsveranstaltungen und Fortbildungen

Weitere Informationen, sowie unsere aktuellen Veröffentlichungen und Veranstaltungen erhalten Sie bei uns im Zentrum oder auf unserer Internetseite.

Informieren können Sie sich auch auf der Internetseite vom Zentrum für angewandte Lernforschung unter:

www.arbeitskreis-lernforschung.de

Termine und Orte für LEA-0

13.05.2019	Kath. Bildungsforum, Haus der Familie Münster	09.30–16.30 Uhr
23.09.2019	OZmL, Osnabrück	09.00–16.00 Uhr

Termine und Orte für LEA-1

04.09.2019	Kompetenzteam Vechta, KVEC.19.36.062, https://vedab.de	09.00–16.00 Uhr
11.09.2019	OZmL, Osnabrück	09.00–16.00 Uhr
06.11.2019	OZmL, Osnabrück	09.00–16.00 Uhr

Termine und Orte für LEA-2

25.09.2019	OZmL, Osnabrück	09.00–16.00 Uhr

©Kopf und Zahl, 31. Ausgabe